УДК 530.1


Р.Л. Орос ди Бартини


П.Г.Кузнецов

Орос ди Бартини Р.Л.* ,
Кузнецов П.Г. **

# Множественность геометрий и множественность физик***

**Орос ди Бартини Роберт Людвигович, выдающийся советский авиаконструктор, физик
***Кузнецов Побиск Георгиевич, последний Генеральный конструктор СССР, крупнейший отечественный специалист по системам целевого управления и планирования

Конструирование технических систем существенно использует принцип «физической реализуемости». Каждая техническая система функционирует, не нарушая физических законов. В то же время сохраняется тенденция к открытию новых, ранее неизвестных, законов природы. Требованием высокой технической культуры становится не только знание уже известных физических законов, но и знание тенденций развития самой физики. В предлагаемой статье тенденция «геометрической физики» рассматривается с новой точки зрения. Авторы исследуют переход от геометрии Евклида, как группы движений абсолютно твердого тела, к множеству геометрий, каждая из которых, оставаясь группой движений, имеет различные инварианты. Кинематическая система физических величин, предложенная Р.Л. ди Бартини, дает систему инвариантов для бесконечного разнообразия групп движений, т.е. для бесконечного разнообразия геометрий. Каждая из таких геометрий соответствует тем или иным классам явлений природы, т.е. тем или иным «частным» физикам. Вся система инвариантов охватывает как известные, так и еще неизвестные классы явлений природы. Предполагается, что теории конструирования технических систем будут следовать духу развития геометрии и физики, т.е. каждый класс технических систем будет описываться тем или иным набором инвариантов из предлагаемой системы.

**Ключевые слова:** геометрии, группы преобразований, инвариант, физическая величина, система пространственно-временных величин.

В настоящее время существенно изменилось представление о геометрии: каждый математик знает, что теперь термин ГЕОМЕТРИЯ применяется к широкому спектру математических дисциплин. Никто не отождествляет термин геометрия с тем, что называлось этим словом до Лобачевского или с тем, что называлось этим словом до Гильберта. Теперь термин ГЕОМЕТРИЯ используется для обозначения МНОЖЕСТВА различных геометрий, каждая из которых отличается от другой, по крайней мере, на одну аксиому. В силу того, что современная математическая физика все более и более «геометризируется», желательно выяснить объективное содержание этого понятия. Превратится ли современная математическая физика в одну из разновидностей геометрий или этот процесс приведет к пониманию ФИЗИКИ, как множества разных физик?

При первой постановке вопроса мы стоим перед выбором той единственной геометрии, которая и является адекватным отображением нашего физического мира. При второй постановке мы стоим перед сотнесением каждому классу физических явлений той или иной из многочисленных геометрий. При решении первой проблемы мы получаем ВСЮ ФИЗИКУ как логическое следствие из ОДНОЙ ГЕОМЕТРИИ

*** Статья воспроизводится по тексту, опубликованному в сб.: Моделирование динамических систем. Вып. 2. Труды семинара «Кибернетика электроэнергетических систем» / Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР; Научно-технический совет Минвуза СССР; Брянский областной совет НТО МАШПРОМ; Брянский институт транспортного машиностроения. Брянск, 1974.

при одном и том же фиксированном наборе аксиом. При решении второй проблемы мы не получаем ВСЮ ФИЗИКУ, но мы строим здание ВСЕЙ ФИЗИКИ по частям: каждой части нашего здания соответствует та или иная геометрия. Сам же процесс завершения здания всей физики оказывается так же далек от завершения, как далеко от завершения здание всеохватывающей ГЕОМЕТРИИ.

Существует мнение, что Анри Пуанкаре имел все основания создания специальной теории относительности, но … это было сделано не им, а А.Эйнштейном. Не подвергая сомнению это мнение, мы, тем не менее, полагаем, что Анри Пуанкаре придерживался второй точки зрения на связь физики и геометрий и именно в силу этого убеждения не позволил себе отдать предпочтение ОДНОЙ ЧАСТНОЙ геометрии, как единственной геометрии, которая и согласуется со всеми видами физической реальности. Приведенный А.Пуанкаре список возможных геометрий, который присутствует в отзыве на работы Д.Гильбарта, совершенно убедительно показывает, как он был далек от первой точки зрения. Мы приведем только два отрывка из работ Пуанкаре. В работе «Об основных гипотезах геометрии», написанной в 1887 г. он пишет:

«Согласно тому, что нами выше было сказано, геометрия есть не что иное, как изучение некоторой группы движений, и в этом смысле можно сказать, что справедливость геометрии Евклида нисколько не противоречит справедливости геометрии Лобачевского, так как существование одной группы вполне совместимо с существованием другой. Мы выбрали между всеми возможными группами одну особенную для того, чтобы к ней относить физические явления, подобно тому, как мы выбираем систему трех координатных осей, чтобы к ним относить геометрические фигуры. Что же определило наш выбор? Это, во-первых, простота выбранной группы; но есть и другое основание: в природе существует замечательные тела, называемые ТВЕРДЫМИ. Опыт говорит нам, что связь различных возможных перемещений этих тел выражается со значительной степенью приближения теми же самыми соотношениями, как и различные операции выбранной группы. Таким образом, основные гипотезы геометрии не суть факты, добытые из опыта; но наблюдение над некоторыми физическими явлениями приводит к выбору именно из числа всех возможных гипотез»[1].

В приведенном отрывке Пуанкаре достаточно ясно указывает связь между аксиомами геометрий и «наблюдением над некоторыми физическими явлениями». Очевидно, что другие наблюдения над другими физическими явлениями будут приводить нас к аксиомам и, соответственно, к геометриям другого вида. Смена наблюдаемых классов физических явлений будет приводить к смене аксиом и построенных на этих аксиомах геометрий. Всеохватывающая аксиоматика может быть построена тогда и только тогда, когда всевозможные классы явлений нами будут уже изучены.

Второй отрывок из работ А.Пуанкаре позволяет развить ранее высказанные соображения.

«Наши идеи о происхождении и значении геометрических истин претерпели очень быструю эволюцию в течение последнего столетия. Исследования Лобачевского, Больаи и Римана открыли новую эру; правда, они не повлияли на тех лиц, слишком многочисленных, которые ищут доказательства постулата Евклида – на них, увы, ничто не могло повлиять, – но они убедили всех истинных ученых в тщетности этих попыток. Таков был первый результат открытия неевклидовых геометрий. Но истинный смысл этого открытия не был выяснен сразу.

Гельмгольц показал сперва, что предложения евклидовой геометрии не что иное, как законы движения твердых тел, тогда как предложения других геометрий суть законы, которым могли бы быть подчинены другие аналогичные тела, которые без сомнения не существуют, но существование коих можно допустить без того, чтобы это привело к малейшему противоречию; такие тела можно было бы даже изготовить при желании. … Ли продвинул анализ значительно дальше. Он изучал, каким путем могут комбинироваться различные возможные движения некоторой системы или, говоря общее, различные возможные преобразования фигуры. Если рассматривать известное число преобразований и затем комбинировать их всеми возможными способами, то совокупность всех этих комбинаций составит то, что он называет ГРУППОЙ. Каждой группе соответствует некоторая геометрия, и наша геометрия, соответствующая группе перемещений твердого тела, есть только весьма частный случай»[2].

Отождествление различных геометрий с соответствующими группами преобразований, выполненное блестящими работами Ф.Клейна и С.Ли, позволило сделать следующий шаг. Честь следующего шага выпала на долю Д.Гильберта, о чем очень хорошо написал в уже цитированной выше работе А.Пуанкаре.

Однако, хотя заслуга Д.Гильберта весьма велика, он является «классиком» геометрии в том смысле, что связывает группу преобразований ВСЕГО ПРОСТРАНСТВА В СЕБЯ. Это относится и к классической точке зрения Ф.Клейна и С.Ли.

Дальнейшее развитие геометрии связано с именами Я.Схоутена – Э.Картана с одной стороны и с именем О.Веблена – с другой. Первое направление завоевало широкое признание среди математиков, а второе – нашло своих приверженцев среди инженеров. Мы сознательно ассоциируем второе направление с инженерами, а не с физиками, хотя всем понятно, что каждый инженер использует именно физические законы в конструировании технических систем.

Хотя идея группы преобразований синтезировала и обобщила все прежние представления о движении и конгруэнтности, хотя она дала принцип классификации, который позволял одним взглядом охватывать

[1] Цит. по: Основания геометрии. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 398.
[2] Там же. С. 452–453.

все разнообразие важнейших геометрий – эта идея не охватывала ВСЕХ геометрий. К числу этих геометрий относились все римановы геометрии. Синтез идей Римана и Клейна и был осуществлен Я.Схоутеном и Э.Картаном: объединяя в одном и том же евклидовом (аффинном, проективном т.д.) пространстве два смежных куска риманова пространства, они находят идею евклидовой (аффинной, перспективной и т.д.) связности. Теперь понятие группы опирается не на преобразование ВСЕГО пространства, а только на пространство соответствующей связности.

Другой путь к поиску обобщения эрлангенской программы был избран О.Вебленом. он предложил рассматривать геометрию, как теорию пространства с ИНВАРИАНТОМ (или с ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ – термином, который предложил Я.Схоутин в противовес термину ИНВАРИАНТ – Веблена). Представляет интерес точка зрения О.Веблена на понятие ИНВАРИАНТ. «Все, что остается неизменным при преобразовании координат, называется инвариантом («Инварианты дифференциальных квадратичных форм» гл. II, п. 2). Так, инвариантом является точка, а также кривая или система кривых. Строго говоря, инвариантом является также всякая вещь, например, растение или животное, не имеющее вовсе отношения к рассматриваемому нами пространству. Инвариант, связанный с пространством, т.е. свойство пространства, в смысле п. I гл. II мы будем называть также ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ. …Другие примеры геометрических объектов с компонентами – аффинные связности и тензоры всех родов»[1].

Мы старались зафиксировать внимание читателя на том, что «растение или животное» может служить примером ИНВАРИАНТОВ. Теперь мы можем покинуть мир «чистой геометрии» и вернуться на нашу грешную землю.

Предшествующее изложение должно было дать возможность инженеру и физику увидеть богатство логических теорий, являющихся непротиворечивыми математическими теориями. Различие математических теорий может рассматриваться как различие «геометрий». Сами геометрии могут трактоваться как ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ с ИНВАРИАНТОМ. Эти фундаментальные понятия мы выделим:

1. ГРУППА
2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ
3. ИНВАРИАНТ

На базе этого списка понятий, образующих ЦЕЛОСТНОСТЬ геометрии или математической теории, и создал свою ветвь тензорного анализа сетей Г.Крон[2].

К сожалению, этот список относится только к математике. Если эти три термина пополнить ЧЕТВЕРТЫМ термином:

4. ФИЗИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА,

то мы совершим переход от множества геометрий к множеству физик. Используя четвертый термин, мы получаем определение не одной из геометрий, а определение одной из ФИЗИК.

ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, имеющая ОПРЕДЕЛЕННУЮ ФИЗИЧЕСКУЮ ВЕЛИЧИНУ – ИНВАРИАНТОМ, есть одна из ФИЗИК.

Инвариантом физической величины принято называть ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

Теперь мы должны обратить внимание на поиск СИСТЕМЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН. Эта система физических величин, если она будет определена правильно, должна порождать СИСТЕМУ ЗАКОНОВ ФИЗИКИ, ибо инвариантность этих физических величин и соответствует ЗАКОНАМ СОХРАНЕНИЯ.

Теория размерностей содержит вопрос о числе ортогональных параметров измерений и мерах их соотношений. Разработанный для отдельных дисциплин науки и не объединяет понятия и их величины в единую систему, позволяющую установить общую закономерность соотношений, как законов природы. Кроме этого, появляющиеся в формулах размерностей дробные показатели при использовании первичных величин [LMT] лишены всякого физического содержания и логического смысла.

В кинематической системе измерений [LT] первичной единицей является квант поля, радиус мировой инверсии протяженности $l$ и длительности $t$, определяемый экспериментально с большой степенью точности. Обозначая фундаментальное отношение $l/t$, равное величине фундаментальной скорости буквой $C$, имеем следующую общую структурную формулу всех физических величин:

$$Д^{\Sigma n} = C^{\gamma} T^{n} = L^{\gamma} T^{n-\gamma} \ ,$$

где $Д^{\Sigma n}$ обозначает дименсиональный объем физической величины, $\Sigma n$ есть сумма показателей в формуле размерностей, $T$ есть радикал размерностей, $n$ и $\gamma$ – целые числа.

Такая кинематическая система физических величин, которая опирается на ДВЕ основные единицы, каждая из которых квантуется, – на единицы ДЛИНЫ [L] и единицу ВРЕМЕНИ [T], и была предложена одним из авторов настоящего сообщения[3] (табл. I).

---

[1] Веблен О., Уайтхед Дж. Основания дифференциальной геометрии. М.: ИЛ, 1949. С.70.
[2] Cron G. Tensor analysis of networks. N.Y. 1939; Крон Г. Исследование сложных систем по частям – диакоптика. М.: Наука, 1972.
[3] Хантли Г. Анализ размерностей. М.: Мир, 1970; Cron G. Tensor analysis of networks. N.Y. 1939.

Табл. 1. Система физических величин Р. ди Бартини

| | | $L^{-3}$ | $L^{-2}$ | $L^{-1}$ | $L^{0}$ | $L^{1}$ | $L^{2}$ | $L^{3}$ | $L^{4}$ | $L^{5}$ | $L^{6}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T^{-6}$ | -9 | | | | | | | $L^3T^{-6}$ | $L^4T^{-6}$ | Изменение мощности | Скорость передачи мощности | 0 |
| $T^{-5}$ | -8 | | | | | | Изменение давления | Поверхностная мощность | Скорость изменения силы | Мощность | Скорость передачи энергии | 1 |
| $T^{-4}$ | -7 | | | | | Изменение плотности тока | Давление | Угловое ускорение массы | Сила | Момент силы Энергия | Скорость передачи действия | 2 |
| $T^{-3}$ | -6 | | | | Изменение углового ускорения | Плотность тока | Напряженность эл-маг. поля Градиент | Ток Массовый расход | Скорость смещения заряда Импульс | Момент количества движения Действие | Момент действия | 3 |
| $T^{-2}$ | -5 | | | Изменение объемной плотности | Массовая плотность Угловое ускорение | Ускорение | Разность потенциалов | Масса Количество магнетизма Количество электричества | Магнитный момент | Момент инерции | | 4 |
| $T^{-1}$ | -4 | | $L^{-2}T^{-1}$ | $L^{-1}T^{-1}$ | Частота | Скорость | Обяльность 2-х мерная | Расход объемный | Скорость смещения объема | | | 5 |
| $T^{0}$ | -3 | $L^{-3}T^0$ | $L^{-2}T^0$ | Изменение проводимости | Безразмерные константы | Длина Емкость Самоиндукция | Поверхность | Объем простран-ственный | | | | 6 |
| $T^{1}$ | -2 | $L^{-3}T^1$ | Изменение магнитной проницаемости | Проводимость | Период | Длительность расстояния | $L^2T^1$ | | | | | 7 |
| $T^{2}$ | -1 | $L^{-3}T^2$ | Магнитная проницаемость | $L^{-1}T^2$ | Поверхность времени | $L^1T^2$ | | | | | | 8 |
| $T^{3}$ | | $L^{-3}T^3$ | $L^{-2}T^3$ | $L^{-1}T^3$ | Объем времени | | | | | | | 9 |
| $T^{4}$ | 0 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Система пространственно-временных величин

Хотя понятие «длина» и не предполагает НАПРАВЛЕНИЕ, тем не менее в кинематической системе физических величин предполагаются ВЕКТОРНЫЕ (ориентированные) величины длины и времени, образующие шестимерное многообразие. Говоря другими словами, это означает, что с каждым из трех пространственных направлений ассоциировано свое собственное ориентированное время. Проще всего ознакомиться с новыми понятиями, если рассмотреть формальную запись для кинематики движущейся точки. Пройденный точкой путь в одномерном движении можно представить бесконечным степенным рядом:

$$S(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots ,$$

где $S(t)$ - пройденный точкой путь, $a_0$ - начальное смещение, $a_1$ - скорость движения точки, $a_2$ - ускорение точки, $a_3$ - изменение ускорения точки и т.д.

Если от одномерного движения точки перейти к трехмерному пространственному движению точки, то общий вид уравнений движений не изменится, а текущие индексы будут пробегать ТРИ значения, как по пространственным координатам, так и по координатам ВРЕМЕНИ:

$$S^{\alpha}(t) = a^{\alpha} + a^{\alpha}_{\beta} t^{\beta} + a^{\alpha}_{\beta\gamma} t^{\beta} t^{\delta} + a^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} t^{\beta} t^{\gamma} t^{\delta} + \dots ,$$

где $S^{\alpha}(t)$ – пройденный точкой путь, $a^{\alpha}$ – начальное смещение, $a^{\alpha}_{\beta}$ – скорость движения точки, $a^{\alpha}_{\beta\gamma}$ – ускорение точки, $a^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ – изменение ускорения точки и т.д., $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots = 1, 2, 3$ .

Анализ размерностей позволяет утверждать, что каждый терм правой части имеет размерность ДЛИНЫ, а коэффициенты – размерность $[L^1T^{-n}]$, где $n$ есть число ковариантных индексов. Введенное шестимерное многообразие с самого начала не предполагает РАВЕНСТВА масштабов «поперечного» и «продольного» времени, т.е. в нем исключается гипотеза о существовании абсолютного скаляра, называемого «временем».

Соответствие вводимых представлений «духу времени» можно иллюстрировать позицией Г.Хантли, высказанной им в 1967 г.:

«Применение усовершенствованного метода размерностей полезно в задачах, где форма тела является одним из определяющих факторов. При решении задач такого рода не делалось различия между размерами тела, параллельными направлению движения и перпендикулярными ему; однако такое различие играет существенную роль. Если тело движется параллельно оси ОХ в прямоугольной системе координат, его линейный размер вдоль этой оси, обозначенный как $[L_x]$, связан с сопротивлением трения и вязкостью среды. Поперечные размеры $[L_y]$ и $[L_z]$ прямо связаны с плотностью среды и не зависят от вязкости. Можно показать, что такое придание векторного характера факторам конфигурации тела позволяет найти полное решение задач, для которых ранее анализ размерностей давал лишь частичное решение»[1].

Г.Хантли иллюстрирует использование векторных длин на примерах из самолето- и ракетостроения. Нетрудно видеть, что предложение Хантли может рассматриваться как частный случай введенного ранее[2] шестимерного многообразия.

Поскольку настоящее сообщение предназначено для инженеров-механиков, которые давно и успешно используют анализ размерностей в решении прикладных задач в самых различных областях, мы проиллюстрируем роль таблицы СИСТЕМЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН Ди Бартини в выделении тех или иных КЛАССОВ физических явлений, которые мы и отождествляем с ЧАСТНЫМИ ФИЗИКАМИ. Вся совокупность этих частных физик, опирающаяся на инварианты по таблице физических величин, образует ФИЗИКУ, как СИСТЕМУ.

## СИСТЕМА ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим класс физических явлений, который характерен тем, что скорость изменения площади является постоянной величиной. Это класс явлений, который установлен Кеплером в форме: «Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равные площади».

Рассмотрим ряд, характеризующий изменение площади во времени, в виде:

$$S^{\alpha\beta}(t) = a^{\alpha\beta} + a^{\alpha\beta}\gamma t^{\gamma} + a^{\alpha\beta}\gamma\delta t^{\gamma} t^{\delta} + \dots ,$$

где $S^{\alpha\beta}(t)$ – меняющаяся со временем площадь, $a^{\alpha\beta}$ – начальное значение площади, $a^{\alpha\beta}\gamma$ – скорость изменения площади, $a^{\alpha\beta}\gamma\delta$ – «ускорение» изменения площади и т.д. $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots = 1, 2, 3$ .

Выделим в числе коэффициентов ряда – скорость изменения площади и приравниваем этот член – постоянной:

$$a^{\alpha\beta}\gamma = const .$$

Перенесем постоянную в левую часть:

$$a^{\alpha\beta}\gamma - const = 0 .$$

Заменим выражение в левой части одним символом:

$$W^{\alpha\beta\gamma} = 0,$$

Это и есть не что иное, как закон Кеплера в тензорной форме. Евклидова геометрия, построенная на группе

[1] Хантли Г. Анализ размерностей. М.: Мир, 1970.

[2] Бартини Р.Л. Некоторые соотношения между физическими константами // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163, № 4. С. 861–864; Он же. Соотношения между физическими величинами // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Атомиздат, 1966. С. 249–266.

движений абсолютно твердого тела, характеризуется инвариантом расстояния между двумя точками.

Это утверждение может быть записано в виде:

$$W^{\alpha} = 0,$$

где $W^{\alpha}$ – и есть инвариант расстояния между точками твердого тела.

Когда мы переходим в КЛАСС физических явлений, называемы гидродинамикой несжимаемой жидкости, то, несмотря на то, что из инвариантности расстояния между двумя точками СЛЕДУЕТ инвариантность ОБЪЕМА, мы не можем сохранять инварианта евклидовой геометрии. Мы постулируем инвариантность объема, но отказываемся от постулата инвариантности расстояния между двумя точками жидкости. Этот постулат мы записываем в виде:

$$W^{\alpha\beta\gamma} = 0,$$

где $W^{\alpha\beta\gamma}$ – и есть инвариант ОБЪЕМА несжимаемой жидкости.

Выделяя клетку таблицы с размерностью $[L^3T^{-2}]$ мы получаем законы сохранения массы, заряда, «магнитной массы» и, кроме того, известный закон Кеплера: «Отношение куба радиуса планеты к квадрату периода обращения есть величина постоянная».

Выделяя клетку с размерностью $[L^4T^{-3}]$, мы получаем закон сохранения количества движения или импульса.

Выделяя клетку с размерностью $[L^5T^{-3}]$, мы получаем закон сохранения момента количества движения.

Выделяя клетку с размерностью $[L^5T^{-4}]$, мы получаем закон сохранения энергии.

Выделяя клетку с размерностью $[L^5T^{-5}]$, мы получаем закон сохранения мощности, который был известен еще Дж.К.Максвеллу.

Некоторые замечания о «ориентированном времени» и «ориентированной временной площади» могут быть полезны для дальнейшего развития физических идей. В клетке таблицы с размерностью $[L^3T^{-2}]$ размещается НЕСКОЛЬКО различных физических величин, которые не аддитивны: масса, электрический заряд и «магнитная масса». Однако в этой клетке стоит в знаменателе выражение для «ориентированной временной площади». Составляя парные произведения из трех векторных времен мы получим три различные «временные площади», которые по определению ортогональны друг другу и поэтому не суммируемы:

[t и tv]; [t и tw]; [tv и tw]

Рассмотренные нами примеры преследуют цель показать возможность формирования нового научного направления, значение которого как для решения прикладных задач, так и для развития теории, трудно переоценить.

Авторы выражают свою признательность академикам Н.Н.Боголюбову и Б.М.Понтекорво за полезные советы и интерес к их работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бартини Р.О. Некоторые соотношения между физическими константами // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163, № 4. С. 861– 864.
2. Бартини Р.О. Соотношения между физическими величинами // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М.: Атомиздат, 1966. С. 249– 266.
3. Веблен О., Уайтхед Дж. Основания дифференциальной геометрии. М.: ИЛ, 1949.
4. Пуанкаре А. Об основных гипотезах геометрии // Основания геометрии. М.: ГИТТЛ, 1956.
5. Крон Г. Исследование сложных систем по частям – диакоптика. М.: Наука, 1972.
6. Хантли Г. Анализ размерностей. М.: Мир, 1970.
7. Cron G. Tensor analysis of networks. N.Y. 1939.