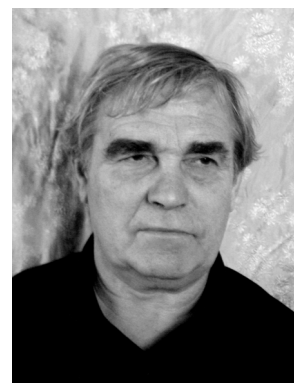


УДК 510.10



А.В. Кочетков



П.В. Федотов

**Кочетков А.В.*,
Федотов П.В.****

Единые уравнения электромагнитного и гравитационного поля

*Кочетков Андрей Викторович, доктор технических наук, профессор Пермского национального исследовательского политехнического университета и Саратовского государственного технического университета, член Президиума и председатель Поволжского отделения Российской академии транспорта

E-mail: soni.81@mail.ru

**Федотов Петр Викторович, инженер, эксперт ООО «Научно-исследовательский центр технического регулирования» (Саратов, Россия)

E-mail: klk50@mail.ru

В порядке дискуссии рассматриваются несколько подходов и образовательных технологий преподавания современной физики в высшей технической школе применительно к рассмотрению единых уравнений электромагнитного и гравитационного поля. Приводятся результаты многолетних исследований и консультаций, переписки с ведущими специалистами и научно-педагогическими изданиями. Показано, что электродинамика Максвелла не может объяснить явление излучения ЭМ-волн, в частности света. Колебания ЭМ-поля следующие из уравнений Максвелла на самом деле являются упругими колебаниями поля и имеют место только в пределах существования электромагнитного поля заряженного тела. Также показано, что преобразования Лоренца – это отображение факта деформации поля при движении зарядов (эффект Доплера для поля). Если принять, что гравитационное взаимодействие распространяется не мгновенно, а с конечной скоростью, не обязательно равной скорости света, то в этом случае гравитационное поле полностью подчиняется уравнениям Максвелла–Лоренца.

Ключевые слова: уравнения поля, электромагнитное поле, гравитационное поле, теория Максвелла, преобразования Лоренца.

Введение

Предлагаются уравнения поля, которое подчиняется теореме Гаусса, в случае статического поля это дает закон зависимости силы взаимодействия обратно пропорционально квадрату расстояния между зарядами. В настоящее время известны два поля, для которых выполняется это условие: электрическое и гравитационное. Речь идет не о физической теории единого поля, объединяющей электромагнитную теорию Максвелла с теорией гравитации, а об уравнениях, которым подчиняются поля, удовлетворяющие этому условию. Также поле должно быть близкодействующим, т.е. взаимодействие должно распространяться не мгновенно, а с конечной скоростью c , не обязательно равной скорости света.

1. Уравнения Максвелла–Лоренца.

Современная классическая электродинамика – это теория поведения электромагнитного поля, осуществляющего взаимодействие между электрическими зарядами (электромагнитное взаимодействие). Классическая электродинамика основывается на уравнениях Максвелла, сформулированных им в 60-х годах 19 века на основе обобщения эмпирических законов электрических и магнитных явлений, в виде 20 уравнений¹. «Последующее изучение уравнений Максвелла показало, что некоторые из них могут быть выведены друг из друга, некоторые – вообще лишние и не отражают фундаментальных законов природы»². Современная математическая форма уравнений Максвелла дана Г. Герцем и О. Хевисайдом: «Впоследствии уравнения Максвелла были «расчищены» Герцем и Хевисайдом. Они сократили число уравнений Максвелла до четырех, самых важных. Эта система уравнений употребляется до сих пор»³.

Достоинством классической электродинамики является то, что она прекрасно согласуется с опытными данными в области электротехники, при описании взаимодействий между зарядами и токами, через посредство

¹ Максвелл Д.К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля / Пер. с англ. З.А. Цейтлина под ред. П.С. Кудрявцева. М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1952. С. 298.

² Карцев В.П. Максвелл. М.: Молодая гвардия, 1974. С. 265.

³ Там же. С. 269.

электромагнитных полей. Признанным недостатком классической электродинамики считается неприменимость её законов при больших частотах и, соответственно, малых длинах электромагнитных волн¹.

Однако область неприменимости классической электродинамики намного больше. Как будет показано далее, классическая электродинамика неприменима к теории излучения электромагнитных волн.

В настоящее время уравнения Максвелла существуют в двух формах: интегральной и дифференциальной. Обе формы идентичны друг другу. И использование той или иной формы определяется удобством применения в каждом конкретном случае. В интегральной форме уравнения Максвелла в системе СГС

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S (\vec{j}_n + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}_n}{\partial t}) d\vec{s}, \quad \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{B}_n}{\partial t} d\vec{s},$$

$$\oint_S \vec{B}_n d\vec{s} = 0, \quad \oint_S \vec{D}_n d\vec{s} = 4\pi \int_V \rho dV = 4\pi q$$
(1)

Уравнения (1) не образуют полной замкнутой системы. Их необходимо дополнить соотношениями, связывающими векторы $\vec{H}, \vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{j}$:

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{H}), \quad \vec{j} = \vec{j}(\vec{E})$$
(2)

Это уравнения состояния или материальными уравнениями; они описывают электромагнитные свойства среды и для каждой конкретной среды имеют определенную форму. В электродинамике рассматриваются, в первую очередь, простейшие материальные уравнения:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}.$$
(3)

Они охватывают электромагнитные свойства достаточно большого числа сред. Однако они не учитывают многие свойства реальных сред.

Кроме этого, система уравнений Максвелла не образует полную систему, для образования полной системы уравнений необходимо дополнить систему уравнений (1) формулой силы Лоренца

$$\vec{F} = q \{ \vec{E} + [\vec{u} \vec{B}] \}.$$
(4)

Электромагнитная энергия распределена в пространстве, занятом полем с некоторой объемной плотностью, таким образом, что электромагнитная энергия, содержащаяся в объеме V , выражается в виде объемного интеграла

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V (\varepsilon E^2 + \mu H^2) dV.$$
(5)

Эта энергия может изменяться во времени за счет двух процессов: она может внутри данного объема превращаться в другие, неэлектромагнитные формы энергии (тепловую энергию, химическую энергию и т.д.), или же возникать из неэлектромагнитных форм; эта энергия, оставаясь электромагнитной, может вытекать из данного объема (или втекать в него) через поверхность S , ограничивающую данный объем.

Электромагнитная энергия, превращающаяся в единицу времени в другие виды энергии, называется мощностью, отдаваемой полем

$$P = \int_V \vec{j} \vec{E} dV.$$
(6)

Энергию, вытекающую в единицу времени из объема через его поверхность, называют кратко потоком энергии или же мощностью излучения:

$$\Sigma = \frac{c}{4\pi} \oint_S [\vec{E} \vec{H}] \vec{n} d\vec{s},$$
(7)

где $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали,
 S – площадь поверхности, ограничивающей объем V .

Вектор

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}]$$
(8)

называется вектором Умова – Пойнтинга. Этот вектор связан с потоком энергии из данного объема формулой

$$\Sigma = \oint_S \vec{S}_n d\vec{s}.$$
(9)

Согласно последней формуле, величину

$$\vec{S}_n d\vec{s}$$

можно интерпретировать как электромагнитную энергию, проходящую в единицу времени через площадку $d\vec{s}$, так что вектор $\vec{S}$ является плотностью потока энергии.

¹ Физический энциклопедический словарь / Под главн. ред. А.М. Прохорова. М.: Большая российская энциклопедия, 1995. С. 867

Как известно, три энергетические величины W , P и Σ связаны между собой соотношением Умова – Пойнтинга:

$$\frac{dW}{dt} + P + \Sigma = 0, \quad (10)$$

которое дает формулировку закона сохранения энергии для электромагнитного поля. Это же соотношение в дифференциальной форме

$$\frac{\partial w}{\partial t} + p + \operatorname{div} \bar{s} = 0. \quad (11)$$

В вакууме, где нет поглощающей среды, нет электрических потерь, $p = 0$. Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{s} = 0. \quad (12)$$

2. Закон сохранения электромагнитного поля

Уравнение Умова–Пойнтинга для вакуума – это закон сохранения электромагнитного поля в вакууме. Подставим в уравнение (12) формулу объемной плотности энергии электромагнитного поля

$$w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 + \frac{\mu}{8\pi} H^2, \quad (13)$$

где w_E – плотность электрической энергии поля на единицу объема, w_H – плотность магнитной энергии поля на единицу объема, тогда

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon_0}{8\pi} E^2 + \frac{\mu_0}{8\pi} H^2 \right) + \operatorname{div} \bar{s} = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) – это закон сохранения электромагнитного поля, т.к. изменение объемной плотности электромагнитного поля в объеме V равно переносу (излучению/поглощению) электромагнитной энергии через поверхность S , ограничивающую объем V . В вакууме электромагнитное поле не возникает ниоткуда, и не исчезает в никуда, а только переносится.

В некоторых источниках приводится это уравнение (например, в работе Л.А. Вайнштейна¹), даже утверждается, что это уравнение «совершенно аналогично уравнению непрерывности для электрического заряда». Но на с. 159 в той же работе читаем: «...если заряд движется с ускорением, то на достаточно большом расстоянии от него можно пренебречь полем с напряженностью E_0 и H_0 напряженностью поля [неподвижного заряда – А.К., П.Ф.] по сравнению с полем, обусловленным ускорением заряда». Нисколько не заботясь объяснениями, откуда берется это поле и куда оно исчезает, когда заряд движется без ускорения!

Также необходимо ответить на следующий вопрос: если энергия электромагнитного поля сохраняется, значит, при излучении электромагнитных волн в вакууме поле излучателя должно уменьшаться. Это можно объяснить для случая излучения антенны, когда в энергию излучения переходит энергия ЭДС токов в антенне. Поле при этом не уменьшается (не расходуется). Но это невозможно объяснить при ускоренном движении точечного заряда. Как известно, при ускоренном движении в вакууме точечного заряда q , согласно теории Максвелла, излучаются электромагнитные волны, при этом интенсивность излучения (энергия, уносимая полем от источника в единицу времени)²:

$$E_H = \frac{2q^2}{3c^3} a^2, \quad (15)$$

где q – величина заряда, a – его ускорение.

В частном случае, когда заряд совершает гармонические колебания, ускорение a по величине равно произведению отклонения x от положения равновесия ($x = x_0 \sin \omega t$, где x_0 – амплитуда отклонения) на квадрат частоты ω . Усредненная по времени t интенсивность излучения

$$E_H = \frac{q^2}{3c^3} \omega^4 x_0^2. \quad (16)$$

Рассмотрим заряд, совершающий гармонические колебания в потенциальном поле. В этом случае работа по перемещению заряда по замкнутому пути (с возвращением в исходную точку) равна нулю. Энергия, затрачиваемая сторонними силами на перемещение заряда, равна нулю (в среднем за период колебания). Так как величина заряда не изменяется, по закону сохранения заряда

$$\frac{dq}{dt} + \operatorname{div} \bar{j} = 0. \quad (17)$$

Значит, на электромагнитное излучение должна расходоваться энергия электромагнитного поля. Это означает, что по прошествии достаточно большого промежутка времени, заряд останется «голым», так как все поле заряда израсходуется на излучение. Так как это не подтверждается экспериментами, значит, что при любом ускоренном движении заряда в потенциальном поле электромагнитные волны не излучаются. Однако, этот

¹ Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Наука, 1988. С. 140.

² Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Т. 6, М.: Мир, 1966. С. 206.

факт никак не отражается в электродинамике Максвелла. Поэтому стоит принять, что ускоренное движение зарядов (по крайней мере, в потенциальных полях) не приводит к электромагнитному излучению. Факт электромагнитных колебаний налицо.

Второй парадокс электродинамики Максвелла – это волновые уравнения электромагнитного поля. Проблема состоит в том, что электромагнитные волны (фотоны) могут существовать там, где нет электромагнитного поля источника, испустившего эти волны. Т.е. фотоны – это самостоятельные образования, не привязанные к источнику (материальные объекты). Чтобы в этом убедиться, достаточно подсчитать электромагнитное поле от звезд, например туманности Андромеды (ближайшая галактика). Свет от этих звезд и даже намного более далеких виден на Земле. А волновые уравнения для ограниченной области пространства или уравнения Гельмгольца

$$\nabla \bar{H} + K^2 \bar{H} = 0 \quad (18)$$

предполагают наличие электромагнитного поля в данной области. Так, если нет поля, нет и колебаний (нечему колебаться).

Дело в том, что уравнения колебаний описывают колебания упругой среды, в данном случае – электромагнитного поля. Это означает, что теория Максвелла не может объяснить излучение электромагнитных волн, которые в действительности существуют. Этот парадокс имеет исторические корни. Когда в середине 19 в. Максвелл разрабатывал теорию электричества и магнетизма, он основывался на идеях Фарадея, о том, что не существует дальнего действия по Ньютону, а все взаимодействия происходят через среду. Максвелл предполагал, что электромагнитные взаимодействия происходят через посредство Эфира – гипотетической среды, заполняющей все пространство вселенной. Соответственно распространение света уподоблялось распространению звука в упругой среде, а напряженность электрического и магнитного поля отождествлялись с механическими натяжениями Эфира¹.

Распространение электромагнитных волн, с точки зрения теории Эфира, просто и логично, Эфир заполняет все пространство, свет – это упругие колебания Эфира. Где есть Эфир (а это вся вселенная), там могут быть упругие колебания Эфира (свет). Но на рубеже 19–20 вв. физики столкнулись с большими трудностями в экспериментах по определению «эфирного ветра», который должен быть, если Эфир существует. Эксперименты сначала Майкельсона, затем Майкельсона совместно с Морли показали, что «эфирного ветра» нет. Но, еще до отрицательных экспериментов по обнаружению «эфирного ветра», физики столкнулись с большими трудностями присущими разным концепциям эфира. Кроме знаменитых экспериментов Майкельсона – Морли были и много других экспериментов по проверке эфирной теории электродинамики, некоторые из них описаны Вавиловым в книге «Экспериментальные основания теории относительности»². Происходил постепенный отход от теорий «механического эфира». «Ближе к концу девятнадцатого века, главным образом, под влиянием Лармора все признали, что эфир – среда нематериальная, *sui generis* и не состоит из опознаваемых элементов, имеющих определенное положение в абсолютном пространстве... Лармор настаивал, говоря: «мы не должны поддаваться соблазну объяснять простые группы отношений, которые были найдены для определения активности эфира, рассматривая их как механические следствия скрытой в этой среде структуры; нам скорее следует удовлетвориться получением их точного динамического соотношения, так же как геометрия исследует или соотносит описательные и метрические свойства пространства, не объясняя их»³. Легко видеть, что теория эфира Лармора подготовила почву для теории относительности Эйнштейна, т.к. Лармор фактически отказался от теорий механического эфира, и в его теории эфир представляет собой некую нематериальную сущность, некая «вещь в себе» по Гегелю, которая не состоит из материальных частиц, не имеет структуры, и не может быть обнаружена ни какими экспериментами, в т.ч. и опытами по обнаружению «эфирного ветра». «Этот взгляд⁴ помог теории Лармора выдержать всю последующую критику, которая основывалась на принципе относительности»⁵. После Лармора оставалось только отказаться от понятия эфира, как от нематериальной, а значит и не существующей материально структуры.

Такой шаг был сделан. Эйнштейн в работе «К электродинамике движущихся тел» пишет: «Примеры подобного рода, как и неудавшиеся попытки обнаружить движение Земли относительно светонесущей среды, ведут к предположению, что не только в механике, но и в электродинамике никакие свойства явлений не соответствуют понятию абсолютного покоя ... Это предположение (содержание которого в дальнейшем будем называть «принципом относительности») мы намерены превратить в предпосылку и сделать, кроме того, в предпосылку и сделать добавочное допущение, а именно, что свет в пустоте всегда распространяется с определенной скоростью V, не зависящей от состояния движения излучающего тела. Эти две предпосылки достаточны для того, чтобы, положив в основу теорию Максвелла для покоящихся тел, построить простую, свободную от противоречий электродинамику движущихся тел. Введение «светонесущего эфира» окажется при этом излишним»⁶. Легко видеть, что теория Эйнштейна не являлась чем-то принципиально новым, а фактически продолжала и развивала идеи Лармора о том, что необходимо отказаться от надежды объяснить распространение света колебаниями материальной среды, а пытаться, как и в геометрии, определять только математические соотношения, которым подчиняются электродинамика и свет.

Но как и теория эфира Лармора, так и теория относительности Эйнштейна не могут ответить на вопрос: а

¹ Фейнман Р. Указ. соч. Т. 4. М.: Мир, 1966. С. 907.

² Вавилов С.И. Собрание сочинений: В 4 т. Т. IV. М.: АН СССР. 1956. С. 27–52.

³ Уиттеккер Э. История теории эфира и электричества. Классические теории. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. С. 359.

⁴ Отказ от теорий вещественного эфира.

⁵ Уиттеккер Э. Указ. соч. С. 359.

⁶ Эйнштейн А. Собрание научных трудов: В 4 т. Т. 1. М.: Наука, 1965. С. 7.

что такое, в частности, свет и электромагнитные излучения в общем? Если в механических теориях эфира «все понятно» (есть механическая среда – «светоносный эфир», а свет и электромагнитные излучения – это колебания «светоносной среды»), то в теориях Лармора, а тем более в теории относительности, непонятно. Эйнштейн прекрасно понимал, что вопрос о физической сущности света является немаловажным, но трудности волновой теории света, неразрывно связанные с теорией эфира, подвигли Эйнштейна выдвинуть теорию фотонов¹ и считать, что электромагнитное излучение, а также свет – это поток материальных частиц. «Итак, теория относительности изменяет наши взгляды на природу света в том отношении, что свет выступает в ней не в связи с гипотетической средой, но как нечто существующее самостоятельно, подобно веществу. Таким образом, инертная масса тела при испускании света уменьшается»².

Из теории Максвелла следует, что при ускоренном движении заряженного тела испускается электромагнитное излучение. Но при этом ни теория относительности, ни теория фотонов не отвечает на вопрос: откуда берется и куда исчезает электромагнитное поле, связанное с ускоренным движением заряда? В литературе, например в работе С.В. Беллюстина³, приводятся «формулы напряженности полей (электрического и магнитного), в случае ускоренного движения точечного заряда в вакууме:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{r}{c^2 s^3} \left(\frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{u}}{c} \right) (\vec{r}\vec{a} + c^2 - u^2) - \frac{r\vec{a}}{c^2 s^2} \right\} \quad (19)$$

и

$$\vec{H} = -\frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{[\vec{r}\vec{u}]}{c^2 s^3} (\vec{r}\vec{a} + c^2 - u^2) + \frac{[\vec{r}\vec{a}]}{cs^2} \right\}. \quad (20)$$

Как видно из сравнения этих формул,

$$\vec{H} = c\epsilon_0 \left[\frac{\vec{r}}{r} \vec{E} \right]. \quad (21)$$

Формула (19) приводится к виду

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3} \left\{ \left(\vec{r} - \frac{r\vec{u}}{c} \right) \vec{r}\vec{a} - r\vec{a} \left(r - \frac{r\vec{u}}{c} \right) \right\} \text{ или } \vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3} \left[\vec{r} \left[\vec{r} - \frac{r\vec{u}}{c}, \vec{a} \right] \right], \quad (22)$$

здесь

$$s = r - \frac{(r\vec{u})}{c}, \quad (23)$$

расстояние до заряда в момент времени

$$t_1 = t - \frac{r}{c}, \quad (24)$$

E_0 – напряженность электростатического поля точечного заряда».

Обратим внимание на то, что электрическое поле движущегося заряда складывается из двух слагаемых: первое – это электростатическое поле (неподвижного) заряда E_0 и то же электростатическое поле, умноженное на коэффициент, зависящий от скорости, ускорения заряда и расстояния от заряда. Фактически второй член определяет запаздывание изменения поля, в связи с тем, что информация о том, что заряд сместился, доходит до любой точки поля не мгновенно, а через период

$$\Delta t = \frac{r}{c}.$$

Поле движется вместе с зарядом, но не одновременно, а постепенно деформируясь, по мере того, как информация о сдвиге заряда доходит до определенных точек поля. Формулы напряженности поля движущегося заряда похожи на формулы эффекта Доплера в акустике. Это так и есть, но в отличие от акустики, в электродинамике имеет значение не частота, а деформация поля, распространяющаяся в пространстве со скоростью c . Но в акустике при движении источника (эффект Доплера) не появляются новые колебания, а только изменяется частота колебаний, излученных источником, так и в электродинамике, движение заряда не порождает новое поле, а только деформирует уже существующее.

То, что понятие излучения в электродинамике подменяется понятием деформации поля, хорошо видно на примере того, как в классической электродинамике определяется энергия, излучаемая точечным зарядом при движении. В работе С.В. Беллюстина вся энергия излучения движущегося заряда определяется как энергия поля в волновой зоне⁴

$$w = \frac{\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} \quad (25)$$

¹ Термин «фотон» был введен американским физико-химиком Г.Н. Льюисом в 1929 г. (Физический энциклопедический словарь... С. 826).

² Эйнштейн А. Указ. соч. Т. 3. С. 187.

³ Беллюстин С.В. Классическая электронная теория. М.: Высшая школа, 1971. С. 158.

⁴ Там же. С. 166.

Данная формула определяет плотность энергии поля в любой зоне, не только в волновой, но при этом – это только энергия поля, независимо от того, движется поле или нет. То, что в современной электродинамике называется электромагнитным излучением, на самом деле является всего лишь упругими колебаниями электрического поля.

Из уравнений Максвелла следует, что напряженности E и H переменного электромагнитного поля удовлетворяют волновому уравнению

$$\nabla E - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad \text{и} \quad \nabla H - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0. \quad (26)$$

В связи с тем, что решением уравнений (26) является волна, делается вывод, что это и есть электромагнитное излучение. Но волновое уравнение существует и для акустических волн, которые являются всего лишь колебаниями среды. Отличием электромагнитных волн считается то, что волновых уравнений два, для E и для H , для акустических волн волновое уравнение одно.

Распространение электромагнитных волн в вакууме, где нет поля, обычно объясняют взаимной электромагнитной индукцией электрического и магнитного полей. Переменное электрическое поле порождает (индуцирует) переменное магнитное поле, а оно, в свою очередь, воспроизводит переменное электрическое поле и т.д. Некоторые ученые даже долго искали элементарный магнитный заряд, но все попытки были тщетными, он не был обнаружен.

3. Магнитное поле

Для разрешения данных вопросов рассмотрим, что такое магнитное поле. Исследуем уравнение микрополя Лоренца.

«Макроскопические уравнения Максвелла описывают среду феноменологически, не рассматривая сложного механизма взаимодействия электромагнитного поля с заряженными частицами среды. Уравнения Максвелла могут быть получены из уравнений Лоренца–Максвелла для микрополя и определенных представлений о строении вещества путем усреднения микрополя по малым пространственно-временным интервалам. Таким способом получают как основные уравнения поля (1), так и конкретную форму уравнений состояния (2), причем вид уравнений поля не зависит от свойств среды»¹. Но в отличие от уравнений Максвелла для макрополя, в уравнениях Лоренца для микрополя единственная среда, в которой изучается поле, – это вакуум и поэтому материальные уравнения (2) приводятся к виду

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E}, \bar{B} = \mu_0 \bar{H}. \quad (27)$$

Кроме этого, постулируется

$$\bar{j}_M = \rho_M u_M. \quad (28)$$

Уравнения микрополя Лоренца аналогичны уравнениям Максвелла

$$\operatorname{div} E_M = \frac{\rho_M}{\varepsilon_0}, \operatorname{rot} E_M = -\frac{\partial B_M}{\partial t}, \operatorname{div} B_M = 0, \operatorname{rot} B_M = \mu_0 \rho_M u_M + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_M}{\partial t}. \quad (29)$$

Аналогично тому, как из уравнений Максвелла (1) следует уравнение непрерывности (12), так и из уравнений Лоренца следует уравнение

$$\frac{d\rho_M}{dt} + \operatorname{div}(\rho_M u_M) = 0. \quad (30)$$

Для микрополя существует уравнение объемной плотности силы Лоренца²

$$f_M = \rho_M \{E_M + [u_M B_M]\}. \quad (31)$$

Можно утверждать, что уравнения микрополя идентичны уравнениям Максвелла и их можно использовать вместо уравнений Максвелла, при усреднении величин при переходе к макрополю.

Рассмотрим потенциалы Лиенара–Вихерта для микрополя³:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}, \quad (32)$$

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\rho u dV}{r}, \quad (33)$$

где ρ – плотность заряда, u – скорость заряда в момент времени

$$t_1 = t - \frac{r}{c},$$

если φ и A определяются в момент времени t .

¹ Там же. С. 390.

² Беллюстин С.В. Указ. соч.

³ Фейнман Р. Указ. соч. Т. 6.

Если считать заряд точечным, то расстояние r и скорость u можно вынести за знак интеграла, тогда, так как

$$\int_V \rho dV = q,$$

где q – величина заряда, то

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad (34)$$

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qu}{r}. \quad (35)$$

Используя далее известное в электродинамике соотношение постоянных

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \quad (36)$$

и сравнивая (34) и (35), окончательно получим

$$A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{qu}{r} = \varphi \frac{u}{c^2}, \quad (37)$$

так как потенциалы φ и A связаны с напряженностями поля E и B соотношениями $E = \text{div } \varphi$ и $B = \text{rot } A$.

В принципе можно подставить последние соотношения в уравнения Лоренца, но в этом случае уравнения будут излишне сложными, потому что в электронной теории существует соотношение¹:

$$H = \epsilon_0 [uE], \quad (38)$$

т.к. $B = \mu_0 H$, то, подставляя в последнюю формулу (36) и (38), получим

$$B = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \epsilon_0 [uE] = \frac{1}{c^2} [uE] \quad (39)$$

Подставим (39) и (36) в уравнения Лоренца (29):

$$\text{div } E = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{rot } E = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial [uE]}{\partial t}, \quad \frac{1}{c^2} \text{div} [uE] = 0, \quad \frac{1}{c^2} \text{rot} [uE] = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \rho u + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (40)$$

Уравнения (40) идентичны уравнениям микрополя, но с существенной поправкой. В последних уравнениях нет упоминания о магнитном поле, электрические заряды – есть, электрическое поле – есть, скорость движения электрических зарядов тоже есть, а магнитного поля нет.

Уравнения Максвелла–Лоренца не являются замкнутой системой уравнений, для определения входящих в них неизвестных полей необходимо ввести формулу силы Лоренца в виде (4) или (31). Подставим в (4) выражение B из (39):

$$F = q \left\{ E + \frac{1}{c^2} [u_1 [u_2 E]] \right\}, \quad (41)$$

здесь q и u_1 – заряд и скорость взаимодействующего заряда, расположенного в точке P , u_2 – скорость заряда, создающего электрическое поле, в точке P , напряженностью E .

Так можно создать классическую электродинамику без магнитного поля.

4. Смысл преобразований Лоренца в электродинамике

При движении точечного заряда в вакууме со скоростью c электрическое поле деформируется таким образом, что теряет радиально сферическую симметрию, которая всегда присутствует для неподвижных зарядов. В этом случае, возможно, разложить общее поле на радиально симметричную часть (электростатическое поле) и тангенциально симметричную часть, которая называется магнитным полем.

Так как деформация поля наступает при любой скорости и даже когда заряд движется прямолинейно и равномерно, для электрического поля преобразования Галилея неприменимы как и для ускоренного движения в механике. При переходе к подвижной системе отсчета, движущейся относительно неподвижной со скоростью u , необходимо учесть, что в движущейся системе тангенциальная составляющая поля (магнитное поле), для зарядов, неподвижных относительно движущейся системы отсчета, равна нулю. Но взаимодействие зарядов не должно зависеть от системы отсчета и изменение конфигурации поля учитывается внесением внешнего магнитного поля, согласно преобразованиям Лоренца. Это аналогично тому, как в механике при переходе от инерциальной системы отсчета к ускоренной вносятся инерциальные силы.

Уравнений Максвелла всего четыре, первое уравнение – это теорема Гаусса, которая в случае электрического поля приводит к закону Кулона для неподвижного заряда. Остальные уравнения появляются из-за того, что поле

¹ Беллюстин С.В. Указ. соч. С. 161.

движущихся электрических зарядов отличается от поля неподвижных зарядов. Но поле подвижного заряда отличается от поля неподвижного заряда потому, что движение поля происходит не одновременно во всех точках, а постепенно по мере продвижения волны возмущения, которая движется со скоростью c , и напряженность поля в точке равна напряженности поля при расположении заряда в момент времени

$$t_1 = t - \frac{r}{c},$$

если φ и A определяются в момент времени t . Если бы возмущения в электрическом поле распространялись мгновенно, поле двигалось как абсолютно жесткое тело и никаких деформаций поля не наблюдалось.

Следующий вопрос: какое значение для уравнений Максвелла имеет то обстоятельство, что для электрического поля существуют заряды двух знаков? Из уравнений Максвелла следует, что никакого. В уравнения входит величина заряда, но знак заряда нигде не учитывается. Отсюда следует, что в принципе электрические заряды могли бы иметь любое количество знаков и один, и два, и три и т.д., и уравнения Максвелла при этом бы нисколько не изменились.

Также интересен вопрос о величине скорости взаимодействия поля, для электрического поля – это скорость света. Из уравнений следует, что величина скорости не влияет на вид уравнений, т.е. конкретное значение скорости передачи возмущений поля не имеет значения для вида уравнений Максвелла, единственно важно, чтобы эта скорость была конечной, хотя бы очень большой или очень маленькой.

Чтобы любое поле подчинялось уравнениям Максвелла, необходимо и достаточно, чтобы для поля удовлетворялись два условия: поле должно подчиняться теореме Гаусса, т.е. для неподвижного точечного заряда поле должно убывать обратно пропорционально квадрату расстояния; поле должно быть не дальнодействующим, а близкодействующим. Возмущение и взаимодействие между зарядами поля должно передаваться не мгновенно, а с какой-то конечной скоростью поля c , причем c любая, не обязательно скорость света. В этом случае любое поле будет подчиняться уравнениям Максвелла.

Легко видеть, что уравнения Максвелла – это динамические уравнения поля, т.к. они учитывают движение зарядов, в отличие от статических уравнений Кулона или закона всемирного тяготения.

4. Эффект Доплера

При рассмотрении поперечного эффекта Доплера для волн было показано¹, что в случае одновременного движения источника и приемника величина изменения частоты (эффект Доплера) зависит только от относительного движения источника и приемника. И при движении источника и приемника, в одну сторону и с одинаковой скоростью, мы определили, что в этом случае эффект Доплера для волн не наблюдается. Но для поля это не так.

На рис. 1 показаны два взаимодействующих заряда A и B , движущихся параллельно друг другу со скоростью v . В момент времени t заряд A находится в точке A_1 , а пробный заряд в B_1 , поле заряда A в точке B_1 равно потенциалу заряда A в момент времени

$$t_1 = t - \frac{r}{c},$$

т.е. при действительном расстоянии между зарядами $R = A_1 B_1$, взаимодействие происходит с расстоянием $R' = A_0 B_1$.

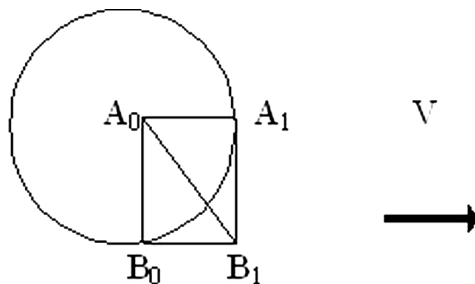


Рис. 1. Два взаимодействующих заряда

Принципиальная разница эффекта Доплера для волн и для поля состоит в том, что для волн существенна только разница расстояний, проходимых волной в разных периодах колебаний, а для поля существенно изменение запаздывающего расстояния взаимодействия. Из рисунка видно, что данный случай для поля аналогичен случаю подвижного источника и неподвижного приемника для волн. Можно воспользоваться формулой из акустики, заменив время T на радиус r . В этом случае получим

$$r' = \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (42)$$

¹Кочетков А.В. Проявления исторического мышления в современной физике (Лекции для непрофессионалов) / А.В. Кочетков, П.В. Федотов. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2001.

Подставив (42) в уравнение силы Кулона, получим

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = q_1 E_2 - \frac{q_1 u E_2 u}{c^2} \quad (43)$$

или в векторном виде

$$\vec{F} = q_1 \left\{ \vec{E}_2 - \left[\vec{u}_1 \frac{[\vec{E}_2 \vec{u}_2]}{c^2} \right] \right\} = q_1 \{ \vec{E}_2 - [\vec{u}_1 \vec{B}_2] \} \quad (44)$$

Последняя формула – это уравнение силы Лоренца, которая является результатом действия эффекта Доплера для поля. Так как эффект Доплера является результатом распространения возмущений поля с конечной скоростью c , то для существования силы Лоренца для любого вида поля достаточно второго условия существования уравнений Максвелла для данного вида поля. При выполнении условий 1 и 2, уравнения поля образуют полную систему уравнений описания поля: уравнения Максвелла и уравнение силы Лоренца.

5. Уравнения гравитационного поля

Выше были приведены два условия, при выполнении которых поле подчиняется уравнениям Максвелла, проверим это для гравитационного поля. Первое условие для гравитационного поля выполняется однозначно, т.к. по закону тяготения сила обратно пропорциональна квадрату расстояния. Второе условие, о близкодействии и распространении возмущений поля с конечной скоростью, до сих пор экспериментально не подтверждено. В общей теории относительности постулируется, что сила тяготения распространяется со скоростью света. Если принять, что гравитационное поле является близкодействующим (распространяется с конечной скоростью), то оно подчиняется уравнениям Максвелла и для него действительно уравнение силы Лоренца. Выводы, которые следуют из уравнений Максвелла, действительны и для гравитационного поля в частности, из уравнений Максвелла, следуют волновые уравнения. Значит, гравитационные волны существуют, но необходимо учитывать, что эти волны не более, чем упругие колебания гравитационного поля.

При рассмотрении уравнений Максвелла были приведены доказательства того, что электромагнитное излучение не подчиняется уравнениям Максвелла и не может быть объяснено на основе современной классической электродинамики. Тем не менее, фотоны существуют, и этот факт должен получить свое объяснение, желательнее также объяснить, почему из уравнений Максвелла невозможно вывести факт электромагнитного излучения.

6. Эксперимент

На рис. 2 показана схема эксперимента, приемник заключен в металлический экран, причем антенна присоединена к экрану, а “земля” – нет, чтобы не закорачивать вход.

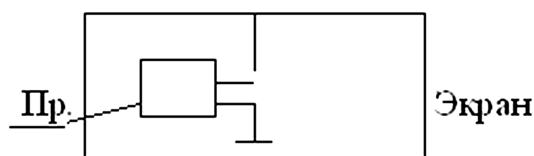


Рис. 2. Схема эксперимента

Из курса радиотехники хорошо известно, что в таких условиях приемник не будет принимать радиоволн. Если заменить приемник передатчиком, то за пределы экрана радиоволны не пройдут. Ситуация с приемом передач радиоволн, в данном эксперименте, очень легко исправить, достаточно вывести “общий” провод за пределы экрана. Данная ситуация легко объясняется тем, что в радиотехнике приемную и передающую антенны представляют как открытый конденсатор (рис. 3).

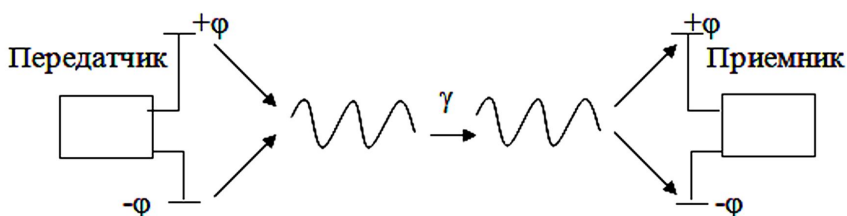


Рис. 3. Схема открытого конденсатора

А конденсатор не бывает с одной обкладкой, даже когда заряжают сферу, то она заряжается относительно земли, а не сама по себе.

В современных учебниках электрическая емкость определяется следующим образом: «Потенциал ϕ (отсчитываемый от нулевого уровня на бесконечности) пропорционален заряду q проводника, т. е. отношение q к ϕ не зависит от q »¹. При этом никто никогда не измеряет потенциал на бесконечности буквально, в действительности

¹ Физический энциклопедический словарь... С. 862.

потенциал на бесконечности – это абстракция, которую нельзя воспринимать буквально. В действительности нулевой потенциал – это потенциал «земли», или что то же самое, потенциал заземленного проводника, который находится не на бесконечном расстоянии, а значительно ближе. Например, в электроскопе (прибор для обнаружения заряда и измерения электрического потенциала) «Заряд, который приобретут листочки, будет пропорционален разности потенциалов между листочками и корпусом электроскопа»¹. Отсюда следует, что уединенный проводник, для которого определяется понятие электрической емкости, – это абстракция, в физике же принято говорить об уединенных проводниках в буквальном смысле, пренебрегая наличием остальных проводников.

В радиотехнике хорошо известен, но явно не озвучен тезис о том, что *монополю* не излучает и не принимает радиоволны. Излучает и принимает всегда *диполь*. В физике хорошо известно излучение ускоренно движущихся частиц в ускорителях: ондуляторное, синхротронное излучение. Принято говорить, что излучают заряженные частицы, и не говорить, что излучают частицы, которые движутся в электрических или магнитных полях. Отсюда – разные точки зрения. Утверждается, что излучают движущиеся ускоренно частицы (уединенная частица в ускорителе – это чистая абстракция); авторы же утверждают, что излучает диполь, состоящий из заряженной частицы и ускорителя (системы заряженных частиц), причем излучение наблюдается только тогда, когда напряженность поля между частицей и ускорителем (системой заряженных частиц) меняется со временем, т.е. частица движется относительно ускорителя, точнее, поля, которое создает ускоритель. Диполь излучает не всегда, а только при изменении напряженности поля в пространстве между телами, составляющими диполь. При наличии постоянных зарядов на проводниках антенны излучения не наблюдается, излучение наблюдается только, когда по антенне течет переменный ток. Заметим, атом также излучает (или поглощает) только при переходе электрона с одной орбиты на другую и никогда без перехода, как бы ускоренно ни двигался атом как единый диполь (ядро и электрон).

Рассмотрим факт из атомной физики. На рис. 4 показана упрощенная схема аннигиляции и рождения электрон-позитронной пары.

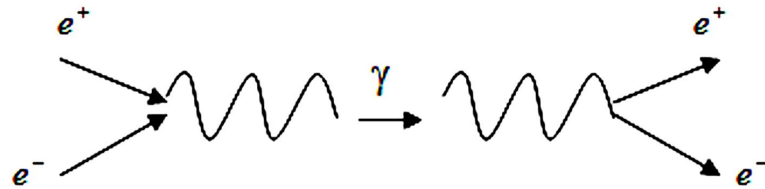


Рис. 4. Упрощенная схема аннигиляции и рождения электрон-позитронной пары

Сравнивая рис. 3 и 4, можно сказать, что тезис о том, что монополю не излучает, а излучает только диполь, действителен для всех диапазонов электромагнитного излучения. Во-вторых, можно предположить, что фотон – это не просто энергия, а агрегат из положительной и отрицательной частицы, массы которых не исчезают, как это принято считать в современной физике, а объединяются. Масса покоя фотона равна не нулю, а сумме масс составляющих его частиц. Это – закон сохранения материи (в философии).

В этом случае легко объясняется факт, что спин фотона всегда равен единице, а спины электрона и позитрона равны $\frac{1}{2}$.

Из теории антенн в радиотехнике следует, что проводники антенны, желательно, должны иметь размеры длины волны и должны быть разнесены в пространстве. Это дает возможность предположить, что фотон представляет собой близкое соседство положительной и отрицательной частицы, размеры которых равны половине длины волны. Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить размеры антенн в диапазоне длинных волн и УКВ. А электромагнитная волна представляет собой цуг фотонов.

7. Пример

Рассмотрим ондуляторное излучение. «Ондулятор – устройство, в котором создаются периодические поля, действующие на проходящие через него заряженные частицы с периодической силой. Наиболее распространенные траектории частицы в ондуляторе – синусоиды и спирали (рис. 5). Движущаяся заряженная частица, попав в ондулятор, совершает колебательно-поступательное движение, т.е. является осциллятором, движущимся равномерно прямолинейно; такая частица испускает ондуляторное излучение»².

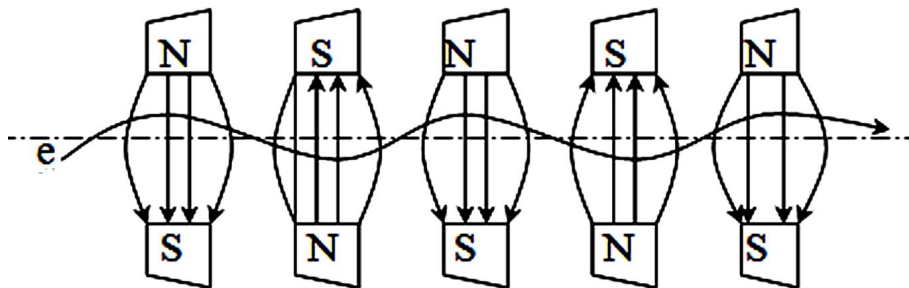


Рис. 5. Схема ондулятора

¹ Орир Дж. Популярная физика. М.: Мир, 1966. С. 181.

² Физический энциклопедический словарь... С. 486.

«Одинокaя ускоренная частица, пройдя через ондулятор, испускает цуг электромагнитных волн, длительность которых

$$\Delta t: \Delta t = \frac{K \lambda_0}{c \beta_{\Pi}} (1 - \beta_{\Pi} \cos \theta), \quad (45)$$

где $\beta_{\Pi} = v_{\Pi}/c$, v_{Π} – постоянная скорость частицы в ондуляторе, c – скорость света, λ_0 – длина периода траектории частицы в ондуляторе, K – число периодов, θ – угол между v_{Π} и направлением наблюдения.

Частота ω k -й гармоники излучения определяется, в соответствии с эффектом Доплера, формулой:

$$\omega_k = \frac{k \Omega}{1 - \beta_{\Pi} \cos \theta}, \quad (46)$$

где

$$\Omega = \frac{2\pi \beta_{\Pi} c}{\lambda_0} - \quad (47)$$

круговая частота колебаний частицы в ондуляторе. При $\theta = 0$ частоты ондуляторного излучения максимальны. Основная часть энергии, испускаемой частицей, сосредоточена вблизи направления её мгновенной скорости v в узком диапазоне¹.

Без потери общности можно принять, что $\theta=0$. Тогда формулы ондуляторного излучения упростятся. Так, формула (46) приведетсa к

$$\omega_k = k \Omega. \quad (48)$$

Для первой гармоники $\omega_k = \Omega$, частота излучения равна частоте колебания частицы в ондуляторе. Формула (45) для условия $\theta = 0$ приведетсa к виду

$$\Delta t = \frac{K \lambda_0}{c \beta_{\Pi}}.$$

Подставив $\beta_{\Pi} = v_{\Pi}/c$, получим

$$\Delta t = \frac{K \lambda_0}{c \beta_{\Pi}} = \frac{K \lambda_0}{c \frac{v_{\Pi}}{c}} = \frac{K \lambda_0}{v_{\Pi}} = K T_0,$$

где T_0 – период колебаний частицы в ондуляторе.

А так как по формуле (48) для первой гармоники частота излучения равна частоте колебания частицы, то количество излученных фотонов (на основной частоте) будет равно количеству колебаний, совершенных частицей в ондуляторе:

$$\Delta t = K' T' = K T_0,$$

здесь K' – количество излученных фотонов, T' – длительность излучения одного фотона.

В синхротроне излучение происходит аналогично, но более сложно, в связи с более сложной траекторией релятивистской частицы в синхроускорителе.

Интересно отметить, что не только релятивистская частица в ондуляторе излучает в основном в узком диапазоне углов. Дипольная антенна также имеет узкую диаграмму направленности. Она излучает в основном в направлении перпендикулярно направлению диполей, или в направлении перпендикулярно колебанию электрического поля в антенне. Сравните с колебаниями частицы в ондуляторе, в нем также максимум излучения наблюдается в направлении перпендикулярно плоскости колебания частицы.

Из этого ясно, почему теория Максвелла не может объяснить факт существования фотонов. Для этого необходимо рассматривать взаимодействие положительного и отрицательного заряда, а уравнения Максвелла описывают только поле, которое создают заряды и токи. Несколько лучше положение с уравнением силы Лоренца, но данное уравнение описывает только механическое взаимодействие (силу). Других независимых уравнений в современной электромагнитной теории нет.

Выводы

1. Уравнения Максвелла в современной электродинамике не могут объяснить излучения электромагнитных волн. Волновые уравнения, которые следуют из уравнений Максвелла, описывают только упругие колебания электрического поля. При движении электрическое поле заряда деформируется, т.к. возмущения электрического поля распространяются не мгновенно, а с конечной скоростью c (скорость света). Магнитного поля как отдельной сущности не существует, магнитное поле, которое входит в уравнения Максвелла – это проявление эффекта Доплера для взаимодействия движущихся электрических зарядов.
2. Преобразования Лоренца – это отображение факта деформации поля при движении зарядов (эффект Доплера для поля). В результате деформации поля даже при равномерном и прямолинейном движении заряда появляется «магнитное» поле тока, величина силы взаимодействия между зарядами зависит от величины и направления скорости движения зарядов. При переходе к другой системе отсчета необходимо компенсировать изменение скорости введением внешнего «магнитного» поля.

¹ Там же. С. 487.

3. Принцип относительности Галилея в электродинамике необходимо заменить на преобразования Лоренца потому, что величина скорости входит в уравнения (в «магнитный» член), и любое изменение скорости относительно системы отсчета изменяет величину «магнитного» взаимодействия. По теории относительности Галилея, все системы отсчета, движущиеся относительно друга и относительно неподвижной системы отсчета с любой скоростью, но без ускорения, инерциальные и поэтому при переходе от одной системы отсчета к другой нет необходимости учитывать изменение скорости, т.к. в классической механике изучаются движения абсолютно твердых тел. В электродинамике это не так, при движении заряда поле деформируется и взаимодействие зарядов отличается от взаимодействия в механике тем, в уравнение силы взаимодействия входит член, зависящий от величины скорости (магнитное поле).
4. Эффект изменения силы взаимодействия зарядов в электродинамике аналогично эффекту Доплера для волн, с той разницей, что в случае взаимодействия электрических зарядов существенно изменение расстояния взаимодействия (запаздывающие потенциалы). Дополнительная сила (магнитная) входящая в уравнение взаимодействия электрических зарядов аналогична инерциальным силам в механике.
5. Если любое потенциальное поле подчиняется закону обратных квадратов и при этом взаимодействие зарядов данного поля происходит не мгновенно, а с конечной скоростью, то это поле подчиняется уравнениям Максвелла–Лоренца.
6. Если принять, что гравитационное взаимодействие распространяется не мгновенно, а с конечной скоростью, не обязательно равной скорости света, то в этом случае гравитационное поле полностью подчиняется уравнениям Максвелла–Лоренца. Если гравитационное поле также подчиняется уравнениям Максвелла–Лоренца, то оно, как и электрическое поле инвариантно относительно преобразований Лоренца.
7. Электрический заряд одного знака никогда не излучает, при любом движении, равномерном или ускоренном. Излучает только диполь, взаимодействующая система зарядов разного знака. Диполь излучает только при изменении напряженности поля в промежутке между зарядами. При движении диполя как единого целого без изменения расстояния или величины заряда излучения не наблюдается.
8. Т.к. в настоящее время в гравитационном поле наблюдается только заряды одного знака, гравитационные фотоны вероятно невозможны, пока не будут обнаружены отрицательные гравитационные заряды. Так как в гравитации все заряды только одного знака, значит, гравитационных фотонов не существует. Но факт существования антиматерии может исправить данный постулат, при условии, что она имеет поле противоположного гравитационного заряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллюстин С.В. Классическая электронная теория. М.: Высшая школа, 1971. 352 с.
2. Вавилов С.И. Собрание сочинений: В 4 т. Т. IV. М.: АН СССР. 1956. 112 с.
3. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Наука, 1988. 440 с.
4. Карцев В.П. Максвелл. М.: Молодая гвардия, 1974. 336 с.
5. Кочетков А.В., Федотов П.В. Проявления исторического мышления в современной физике (Лекции для непрофессионалов). Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2001. 176 с.
6. Максвелл Д.К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля / Пер. с англ. З.А. Цейтлина под ред. П.С. Кудрявцева. М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1952. 670 с.
7. Орир Дж. Популярная физика / Пер. с англ. С.П. Баканова, Е.М. Лейкина, В.П. Смильги; ред. Л.В. Гессен.. М.: Мир, 1966. 447 с.
8. Уиттекер Э. История теории эфира и электричества. Классические теории. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 512 с.
9. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Т. 4. М.: Мир, 1966.
10. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Т. 6. М.: Мир, 1966.
11. Эйнштейн А. Собрание научных трудов: В 4 т. Т. 1. М.: Наука, 1965. 700 с.
12. Эйнштейн А. Собрание научных трудов: В 4 т. Т. 3. М.: Наука, 1966. 632 с.
13. Heaviside O. *Electromagnetic Theory*. New York: Cosimo, Inc., 2008.
14. Heaviside O. "A Gravitational and Electromagnetic Analogy. Part I." *The Electrician* 31 (1893): 281–282. Web. <<http://physics.wvu.edu/resources/250/1243944534.pdf>>.
15. Hertz H. *The Principles of Mechanics Presented in a New Form*. New York: Courier Dover Publications, 2004.
16. Hertz H. "The Forces of Electrical Oscillations Treated According to Maxwell's Theory, Weidemann's Ann. 36, 1 (1889)." *Electric Waves* by H. Hertz. New York: Dover, 1962, chap. 9.
17. Jefimenko O.D. *Causality, Electromagnetic Induction, and Gravitation: A Different Approach to the Theory of Electromagnetic and Gravitational Fields*. Zvezdny, 2000, 2nd ed.
18. Orear J. "VII. Conférences-Lectures. The New Physics." *Dialectica* 21.1-4 (1967): 277–291.
19. Roche J. "The Present Status of Maxwell's Displacement Current." *European Journal of Physics* 19.2 (1998): 155–166.

Цитирование по ГОСТ Р 7.0.11—2011:

Кочетков, А. В., Федотов, П. В. Единые уравнения электромагнитного и гравитационного поля / А.В. Кочетков, П.В. Федотов // Пространство и Время. — 2014. — № 1(15). — С. 62—73. Стационарный сетевой адрес: 2226-7271provr_st1-15.2014.24.