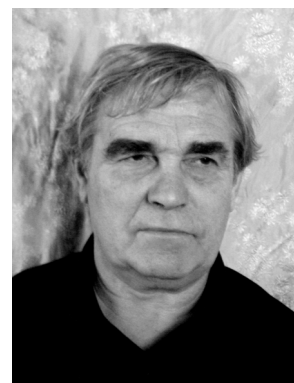


УДК 510.10



А.В. Кочетков



П.В. Федотов

Кочетков А.В.*,
Федотов П.В.**

Оценка проявлений исторического менталитета в современной механике и физике

*Кочетков Андрей Викторович, доктор технических наук, профессор Пермского национального исследовательского политехнического университета и Саратовского государственного технического университета, член Президиума и председатель Поволжского отделения Российской академии транспорта
E-mail: soni.81@mail.ru

**Федотов Петр Викторович, инженер, эксперт ООО «Научно-исследовательский центр технического регулирования» (Саратов, Россия)

Настоящая работа посвящена проблемам взаимоотношений математики и физики. Рассматриваются современные методы обучения в механике и физике в средней и высшей технической школе. Сформулирован тезис о том, что ньютоновская механика изучает движение системы материальных точек, или абсолютно твердого тела, в общем случае, в обобщенных координатах. В частных случаях, когда это удобно, в декартовых. Показано, что уравнения Ньютона – это уравнения Эйлера – Лагранжа в любой системе координат. Лагранжева механика не освобождает физику от эмпирических принципов, как это иногда кажется, а только переводит эмпирику, требующую экспериментальной проверки, на уровень более общих принципов принятых априори, превращенных в догматы веры.

Ключевые слова: механика Ньютона, механика Лагранжа, принцип Гамильтона, обобщенные координаты, физическая картина мира, математическая картина мира.

Введение

Данная работа затрагивает вопросы преподавания естественных наук, т.к. именно от того, как последние преподаются в средней и высшей школе в первую очередь зависит состояние этих самых естественных наук. Причем методики преподавания влияют на развитие науки и применение в технике новейших научных достижений намного больше, чем любое финансирование, потому что если науку не понимают большинство инженеров, то никакое финансирование не заставит их внедрять достижения этих самых наук.

Видный русский математик М.В. Остроградский уделял много внимания проблемам преподавания (это не очень широко известно, тем не менее, это так) совместно с А. Блумом написал брошюру «Размышления о преподавании» – в этой брошюре авторы осудили методы преподавания в современной им школе: «Обучение ведется слишком сухо, абстрактно, оторвано от потребностей жизни, без учета наклонностей и интересов детей... Кто из нас не видел, что из 50 соучеников, по крайней мере, 40 отвращены и обескуражены навсегда абстрактными идеями, которые нам вначале преподносили, прежде чем сделать их понятными с помощью примеров, взятых из практической жизни. Действительно, на уроках арифметики, алгебры, геометрии ничто не свидетельствовало о необходимости их изучения для практической жизни. Ничего не было рассказано об истории наук. Глубокие теории, сухие, непонятные определения были изложены, повторены и, осмелимся сказать, пережеваны, не давая никакого другого результата, чем образование небольшого количества учеников. Кажется, что жрецы древнего Египта еще руководят тайнами наук»¹.

Остроградский призывал к внесению в программу среднего образования элементов высшей математики², великий математик тогда еще не знал, что элементы высшей математики в программу среднего образования будут внесены, но стойкое отвращение большинства обучающихся к изучению математики и физики более чем через полтора века останется неизменным.

В некоторой степени этот парадокс разъясняет другой великий физик и математик Анри Пуанкаре, также уделявший большое внимание методологии преподавания, понимая важность обучения для науки.

«Что же тогда происходит? В начале они [ученики – А.К., П.Ф.] еще схватывают те очевидные вещи, которые представляются их взору; но, так как последние связаны чрезвычайно тонкой нитью с предшествующими и последующими, то они не оставляют никакого следа в их мозгу; они тотчас забываются.

¹ Остроградский М.В. Избранные труды. М.: АН СССР, 1958. С. 49.

² Там же.

Освещенные на одно мгновение, они сейчас же исчезают в сумраке вечной ночи. А когда люди следят за дальнейшим развитием доказательства, для них исчезает и прежняя эфемерная ясность, так как теоремы опираются одна на другую, а теоремы, которые им нужны, уже забыты. Таким образом, эти люди становятся не способными понимать математику.

Не всегда здесь виной преподаватель; зачастую ум людей, нуждающийся в руководящей нити, слишком ленив для поисков ее. Но, чтобы помочь непонимающим, мы должны сначала хорошо узнать то, что их останавливает»¹.

«В построении математической науки и ее преподавании различаются две противоположные тенденции – аналитическая и интуитивная. По мере развития науки первая стремилась выйти вперед. Обе, однако, играют необходимую роль. В преподавании необходимо обратиться к интуиции, чтобы развить некоторые способности ума, полезные для ученого и особенно для инженера. В самой науке интуиция остается, за исключением нескольких привилегированных умов, главным инструментом изобретения, в то время как анализ все более стремится стать единственным законным инструментом доказательства»².

С того времени, как были написаны эти пророческие слова, прошло много времени, и сейчас уже можно увидеть результаты этого пути развития. В науке все меньше остается места для интуиции и размышления, зато все больше внимания уделяется аналитическим (читай, математическим) методам исследования. Все большее значение в науке приобретает знание математики, и все меньше места остается другим наукам. Иногда в шутку, иногда всерьез используется выражение: «Каждая наука настолько является наукой, насколько в ней математики».

Но математика – это «палка о двух концах». Существуют и другие цитаты, например: «Математика – это самый совершенный способ водить самого себя за нос». Эти слова принадлежат А. Эйнштейну, автору специальной и общей теории относительности – тех теорий в современной физике, которые невозможны без сложного математического аппарата. Но, тем не менее, эти слова сказаны, и Эйнштейн явно знал, что говорил.

Настоящая работа посвящена проблемам взаимоотношения математики и физики, и, несмотря на то, что в ней много математических формул и определений, основное для авторов все-таки физика, хотя современную физику невозможно представить без математики.

Механика Ньютона, Лагранжа и Гамильтона

Начало развития механики принято связывать с Древней Грецией. Достаточно вспомнить строительство пирамид в Древнем Египте, чтобы усомниться в том, что до Древней Греции механики (как науки) не существовало. К начальным научным работам принято относить натурфилософские сочинения Аристотеля (4 в. до н.э.)³.

Основные разделы классической механики принято различать по имени их авторов: ньютоновская (ньютонова), лагранжева и гамильтонова (имеется в виду не вся механика, а только динамика механической системы материальных точек или абсолютно твердого тела): «В 18 в. интенсивно развиваются аналитические методы решения задач механики, основывающиеся на использовании дифференциальных и интегральных исчислений. Основы классической механики заложены в работах И. Ньютона. Разработку этих методов завершил Лагранж, получивший уравнения движения системы в обобщенных координатах»⁴.

В данной статье делается попытка внести ясность в вопрос о различиях и границах применения (а также о достоинствах и недостатках) каждой из теорий динамики. Необходимость таких попыток ясна из того, что в современной литературе нет четкого понятия ньютоновская и лагранжева механика и, главное, нет ясной оценки достоинств и недостатков каждой из «механик».

Так, в частности, в «Математических методах классической механики» В.И. Арнольда сказано: «Ньютонова механика изучает системы материальных точек в трехмерном евклидовом пространстве»⁵.

По определению, «евклидово пространство – пространство, свойства которого описываются аксиомами евклидовой геометрии. В более общем смысле евклидово пространство – конечномерное действительное пространство R^n со скалярным произведением (x, y) где $x, y \in R^n$, которое в надлежащем образом выбранных координатах (декартовых)

$$x(x_1, \dots, x_n) \text{ и } y(y_1, \dots, y_n)$$

выражается формулой

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (1.1)$$

То есть ньютонова механика предполагает изучение движения только в прямоугольных декартовых координатах, т.е., например, в полярных координатах формула скалярного произведения не совпадает с формулой (1.1), и даже в декартовых косоугольных координатах формула скалярного произведения отличается от (1.1). Во-вторых, в любых других координатах, кроме декартовых прямоугольных, аксиомы Евклида уже не будут аксиомами. Как известно, «аксиома – основное положение, самоочевидный принцип»⁷. По крайней мере, аксиомы Евклида, переведенные математически в другие координаты, перестают быть самоочевидными и требуют доказательств.

Тем не менее, в ньютоновской механике широко применяются другие системы координат, кроме декартовых, например, при решении задачи движения материальной точки в центральном поле – полярные (сферические), например:

¹ Пуанкаре А. О Науке / Пер. с фр. М.: Наука, 1983. С. 353.

² Пуанкаре А. Избранные труды // Соч.: В 3 т. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 660.

³ Физическая энциклопедия: В 5 т. Т. 3. М.: Большая Российская энциклопедия. 1992. С. 127

⁴ Там же. С. 128

⁵ Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. С. 7.

⁶ Математическая энциклопедия: В 5 т. / Гл. ред. И.М. Виноградов. Т. 2. М.: Советская энциклопедия. 1979. С. 98.

⁷ Математическая энциклопедия... Т. 1. С. 103

«Рассмотрим движение точки в центральном поле на плоскости

$$\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r}, U = U(r). \quad (1.2)$$

Естественно перейти к полярным координатам r, φ ¹.

Так же естественно при решении других конкретных задач в рамках ньютоновской механики вводятся любые координаты, а не только прямоугольные декартовы, и значит под термином «координаты» в ньютоновской механике, в общем случае, понимаются координаты любые, «обобщенные».

Приведенные рассуждения позволяют сформулировать тезис о том, что ньютоновская механика изучает движение системы материальных точек или абсолютно твердого тела в общем случае, в обобщенных координатах. В частных случаях, когда это удобно, – в декартовых.

И, таким образом, мы пришли к противоречию, состоящему в том, что по применяемым координатам (обобщенным) ньютоновская механика ничем не отличается от лагранжевой, где также исследование движения проводится в обобщенных координатах.

Других строгих определений ньютоновской механики и ее отличий от лагранжевой механики не существует. По крайней мере, авторам они неизвестны.

Мы не рассматриваем отдельно гамильтонову механику, пользуясь определением, данным в литературе: «Лагранжева механика включает гамильтонову как частный случай (фазовое пространство в этом случае есть кокасательное расслоение конфигурационного, а функция Гамильтона – преобразование Лежандра функции Лагранжа)»².

Ньютоновская механика

Разберемся в вопросе, что же является принципиальным в ньютоновской механике, то есть подготовим основание для ответа, поставленного во введении: чем ньютоновская механика принципиально отличается от лагранжевой.

Как уже сказано, по применяемым координатам: декартовым, обобщенным и т.д., ньютоновская механика не отличается от других. Следующее определение, которое встречается в литературе, – это обоснование того, что ньютоновская механика основана на трех законах Ньютона, отсюда и название.

Данное определение не может считаться серьезным, т.к. математические законы Ньютона не только не противоречат законам механики Лагранжа и Гамильтона, но, наоборот, являются неотъемлемой частью лагранжевой механики, такой как уравнения Эйлера – Лагранжа. Поэтому присутствие уравнений Ньютона не дает оснований отличать ньютоновскую механику.

И все-таки именно по уравнениям Ньютона идет разделение механики – не по их наличию, а по способу их введения в механику.

Так, в лагранжевой механике уравнения Эйлера – Лагранжа (уравнения Ньютона) – это следствие вариационного принципа Гамильтона в механике. А в ньютоновской механике уравнения Ньютона не выводятся из каких-либо основополагающих законов, а сами являются таковыми и вводятся эмпирически как результат долгой практики изучения динамики движения твердых тел.

Приведем примерный образец основ ньютоновской механики:

«Согласно принципу детерминированности Ньютона все движения системы однозначно определяются ее начальными положениями

$$(\bar{x}(t_0) \in R^N)$$

и начальными скоростями

$$(\bar{\dot{x}}(t_0) \in R^N).$$

В частности, начальные положения и скорости определяют ускорения. Иными словами, существует функция

$$F: R^N \times R^N \times R^N \rightarrow R^N$$

такая, что

$$\ddot{\bar{x}} = F(x, \dot{x}, t). \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) положено Ньютоном в основу механики. Оно называется уравнением Ньютона.

Вид функции F для каждой конкретной механической системы определяется экспериментально. С математической точки зрения, вид F для каждой системы составляет определение этой системы»³.

Такое положение – что закон вводится на основе обработки экспериментальных данных – проходит красной нитью через всю ньютоновскую механику. Все основные законы не выводятся, а эмпирически вводятся.

Например, формула кинетической энергии в декартовых координатах

$$T = \frac{mv^2}{2}, \quad (1.4)$$

является чисто эмпирической и не следует ни из каких более общих законов. То же самое можно сказать и о полной механической энергии системы

$$E = T(\dot{x}) - U(x), \quad (1.5)$$

где E – полная энергия системы, T – кинетическая энергия, U – потенциальная энергия.

Можно сделать предварительный вывод, что ньютоновская механика основана на эмпирических законах, и главным доказательством истины является экспериментальное подтверждение. Как заявлял Ньютон, «гипотез не измышляю».

Но все-таки, как мы увидим далее, это не является принципиальным отличием ньютоновской механики,

¹ Арнольд В.И. Указ. соч. С. 31.

² Там же. С. 137.

³ Там же. С. 12.

хотя бы потому, что в лагранжевой механике эмпиризма ничуть не меньше.

Лагранжева механика

«Лагранжева механика описывает движение механической системы при помощи конфигурационного пространства. Ньютонова потенциальная система – частный случай лагранжевой (конфигурационное пространство в этом случае евклидово, а функция Лагранжа в этом случае равна разности кинетической и потенциальной энергий)»¹.

В приведенной цитате есть одна важная фраза о том, что ньютоновская механика – частный случай лагранжевой. Но никаких других механических законов, кроме законов ньютоновской механики, в лагранжевой механике нет. Значит, фраза о том, что ньютоновская механика является частным случаем лагранжевой, касается только применения систем координат, в ньютоновской при постановке задачи применяются только декартовы (а в процессе решения конкретных задач переходят к любым координатам – полярным, цилиндрическим, сферическим, подвижным и неподвижным), т.е. в принципе применяются обобщенные координаты, но в неявном виде, а в лагранжевой – сразу при постановке задачи объявляются обобщенные, которые включают в себя и декартовы координаты. Причем набор координат применяемых при решении конкретных задач одинаков и в ньютоновской и в лагранжевой механике.

Основанием для лагранжевой механики является вариационный принцип наименьшего действия Гамильтона.

«Движения механической системы совпадают с экстремальми функционала

$$\overline{\Phi}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (1.6)$$

Где $L = T - U$ разность кинетической и потенциальной энергий»².

Согласно вариационному исчислению, «чтобы кривая γ была экстремалью функционала

$$\overline{\Phi}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt$$

на пространстве кривых $x(t)$, соединяющих две данные точки (t_0, x_0) и (t_1, x_1) , необходимо и достаточно выполнение вдоль нее уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Это система уравнений второго порядка, и решение зависит от $2n$ произвольных постоянных.

Для нахождения их служат $2n$ условий $x(t_0) = x_0$ и $x(t_1) = x_1$.

Сравним уравнения динамики Ньютона

$$\frac{d}{dt} (m_i \dot{r}_i) + \frac{\partial U}{\partial r_i} = 0, \quad (1.7)$$

с уравнением Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0. \quad (1.8)$$

Если

$$L = \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} - U, \quad (1.9)$$

то легко видеть, что уравнения Ньютона – это уравнения Эйлера – Лагранжа для функционала согласно вариационному принципу Гамильтона»³.

Но в декартовой неподвижной системе координат, принятой за основную в ньютоновской механике, функция Лагранжа *всегда* имеет вид (1.9), другой вид функция Лагранжа имеет только при переходе к другим координатам, но и уравнения Ньютона в других координатах преобразуются к соответствующему виду. Таким образом, уравнения Ньютона – это уравнения Эйлера–Лагранжа в любой системе координат.

Ранее, рассматривая уравнения Ньютона, мы говорили, что эти уравнения эмпирические и в ньютоновской механике не следуют ни из каких других законов и принципов.

В лагранжевой механике уравнения Эйлера – Лагранжа (уравнения Ньютона) следуют из принципа Гамильтона. Но в тоже время, сам принцип Гамильтона и форма функции Лагранжа также априорные.

Таким образом, хотя лагранжеву механику и называют аналитической, в ее основе, также как и в основе ньютоновской механики, лежат эмпирические принципы.

Лагранжева механика не освобождает физику от эмпирических принципов, как это иногда кажется, а только переводит эмпирику, требующую экспериментальной проверки, на уровень более общих принципов, принятых априори, превращенных в *догматы веры*.

В доказательство приведем цитату:

«Наблюдательная (опытная) механика входит в различные отделы экспериментальной физики. В ней устанавливается связь между свойствами материальных тел, их движениями и причинами, вызывающими или изменяющими движение. Эти причины называют *силами*. Упомянутая связь формулирует-

¹ Там же. С. 47.

² Там же. С. 51.

³ Там же С. 49.

ся в виде законов движения, которые не являются математическими следствиями каких-то изначальных истин, а представляют собой индуктивные положения, основанные на большом числе согласующихся между собой опытных фактов. *Эти положения представляют собой утверждения о свойствах движения материальных объектов, верные с той или иной точностью* [курсив наш – А.К., П.Ф.].

Теоретическая, или рациональная, механика опирается на некоторое конечное число законов, установленных в опытной механике, *принимаемых за истину, не требующих доказательств – аксиомы* [курсив наш – А.К., П.Ф.]. Эти аксиомы заменяют собой в теоретической механике индуктивные истины опытной механики¹.

Причем в опытной механике «эти положения..., верные с той или иной точностью», а в теоретической механике «конечное число законов..., принимаемых за истину, не требующих доказательств – аксиомы», вот в чем принципиальное отличие механики Ньютона от механики Лагранжа. В ньютоновской каждое положение должно быть подтверждено экспериментально, а в лагранжевой основные положения должны приниматься на веру, как истины, не требующие доказательств.

Но вера в аксиомы – штука тонкая.

Во-первых, аксиомы очевидны только на первый взгляд, да и то больше в силу привычки верить в них, так в свое время было с гелиоцентрической системой мира Коперника. Противники Коперника апеллировали не к фактам, которых у них не было, а к безграничной вере в то, что Бог устроил Землю «по Аристотелю».

Во-вторых, аксиомы верны только при определенных условиях, например аксиомы Евклида верны только в евклидовом пространстве и не выполняются в пространствах Римана–Бойяи, Лобачевского и других неевклидовых пространствах. Причем не верны не все сразу, а каждая в отдельности, любая аксиома Евклида может быть верна или неверна в конкретном неевклидовом пространстве, и этот вопрос требует конкретного рассмотрения в каждом отдельном случае.

В-третьих, безграничная вера в непогрешимость аксиом не помогает, а, наоборот, мешает развитию.

В то же самое время в аналитической механике нет и не может быть аксиом, не подтверждаемых экспериментально, а значит, нет других законов, которые отсутствуют в опытной физике. Можно сказать, что аналитическая и опытная механики рассматривают одни и те же явления, пользуются одними и теми же законами, но с разных точек зрения. И значит, в аналитической механике невозможны выводы, поддающиеся экспериментальной проверке, но отсутствующие в опытной механике.

Гамильтонова механика

Гамильтонова механика наиболее математически формализованный раздел теоретической механики. Раздел, именующийся гамильтоновой механикой, настолько математический, что в литературе, например, в «Математических методах классической механики» В.И. Арнольда², приводится следующее определение: «Гамильтонова механика – это геометрия в фазовом пространстве. Гамильтонова механическая система задается четномерным многообразием («фазовым пространством»), симплектической структурой на нем («интегральным инвариантом Пуанкаре») и функцией на нем («функцией Гамильтона»). Часто смешивают названия гамильтонова механика и канонические уравнения механики; так, в Физическом энциклопедическом словаре сказано следующее: «КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ (уравнения Гамильтона), дифференциальные уравнения движения механической системы (выведенные ирландским учёным У. Гамильтоном в 1834), в которых переменными, кроме *обобщённых координат* q_i , являются *обобщённые импульсы* p_i , совокупность q_i и p_i называются канонически переменными. Канонические уравнения механики имеют вид:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

где $H(q_i, p_i, t)$ – Гамильтона функция, равная (когда связи не зависят от времени, а действующие силы потенциальны) сумме кинетической и потенциальной энергий системы, выраженных через канонические переменные; s – число степеней свободы системы. Интегрируя эту систему обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, можно найти все q_i и p_i как функции времени t и $2s$ постоянных, определяемых по нач. данным. Канонические уравнения механики обладают тем важным свойством, что позволяют с помощью т. н. канонического преобразования перейти от q_i и p_i к новым каноническим переменным $Q_i(q_i, p_i, t)$ и $P_i(q_i, p_i, t)$ которые тоже удовлетворяют каноническим уравнениям механики, но с другой функцией $H(Q_i, P_i, t)$. Так канонические уравнения механики можно привести к виду, упрощающему процесс их интегрирования. Кроме классической механики, канонические уравнения механики используются в статистической физике, квантовой механике, электродинамике и др. областях физики³.

Заметим, что канонические уравнения ВЫВЕДЕНЫ Гамильтоном математически, а не получены из опытов, как это сделал Ньютон. Тем не менее, уравнения Гамильтона получили широкое распространение именно в силу математического формализма и потому, что уравнения Гамильтона являясь дифференциальными уравнениями 1-го порядка, легче интегрируются в общем случае, чем уравнения Лагранжа или уравнения Ньютона.

Силы инерции

Из вышеизложенного явно не видно принципиальных различий между лагранжево-гамильтоновой и ньютоновской механиками. Но они существуют, и различия пока еще достаточно велики.

Корни этих различий «прячутся» в понятии инерциального движения.

Так, в ньютоновской механике это понятие заложено в первом законе Ньютона. Этот закон гласит: «тело, на которое не действуют внешние силы, движется прямолинейно равномерно».

¹ Маркеев А.П. Теоретическая механика. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 1999. С. 11.

² Арнольд В.И. Указ. соч. С. 137.

³ Физический энциклопедический словарь // Гл. ред. А.М. Прохоров. М.: Большая Советская Энциклопедия. 1995. С. 241.

Таким образом, в ньютоновской механике существуют избранные системы отсчета, для которых при переходе от одной инерциальной системы отсчета (ИСО) к другой не меняется запись уравнений движения независимо от того, с какой скоростью одна система отсчета движется относительно другой. Но это только в случае перехода от одной ИСО к другой ИСО. В случае перехода к неинерциальным системам отсчета (неИСО) в уравнения движения появляются дополнительные члены, отражающие тот факт, что в неИСО на тело действуют «инерциальные силы». Причем то, что инерциальные силы появляются в уравнениях Ньютона только в неИСО, дало повод многим авторам современных учебников называть их «фиктивными силами». Само название «фиктивные» означает, что в действительности их не существует в Природе, якобы эти силы существуют только в уравнениях. Но для того, чтобы убедиться в их реальном существовании, достаточно посмотреть, как разрывает центробежными силами несбалансированный маховик при его раскрутке. Попад под «обстрел» осколков такого маховика, легко убедиться, что центробежные силы совершенно реальны.

Аналогичные примеры реальности существуют и для другой силы инерции – кориолисовой. Например, «гайка Джанибекова». Эффект состоит в том, что гайка, совершающая два движения – прямолинейно-поступательное и вращательное вокруг продольной оси резьбы, – в полете переворачивается, и если первоначально она вращалась по часовой стрелке (если смотреть по ходу движения), то через некоторое время она самопроизвольно переворачивается на 180 градусов и, сохраняя поступательное прямолинейное движение, вращается уже против часовой стрелки. Через некоторое время процесс переворота повторяется – и так много раз. Несмотря на бурные обсуждения в Интернете и даже высказывания о том, что Джанибеков совершил открытие нового природного явления, ничего нового в этом эффекте нет. Более того, приятно сознавать, что данное явление предсказала и исследовала наша соотечественница, Софья Ковалевская. Её работа называлась «Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки»¹. В ней Ковалевская исследовала движение несимметричных гироскопов и показала, что при отсутствии осевой симметрии гироскоп ведет себя нерегулярно: в отличие от симметричных гироскопов не сохраняет пространственное положение оси вращения, а «рыскает», вплоть до переворотов оси вращения, – что и наблюдается в эффекте Джанибекова. Эта работа была незаслуженно забыта, но с тех пор все гироскопы тщательно симметрируются и балансируются.

Но кроме реального существования сил инерции есть еще один спорный вопрос: на какое тело действуют силы инерции? Современная ньютоновская механика отвечает однозначно: в ИСО силы инерции действуют на связь (тело, ограничивающее свободное движение исследуемого тела), а в неИСО силы инерции действуют уже на само исследуемое тело. Но в первом приведенном примере разрывает сам маховик, а не его связи, во втором примере опять же переворачивается сама гайка, тем более, что гайка не имеет связей вообще, а находится в свободном полете и, согласно канонам современной ньютоновской механики, силам инерции действовать не на что, тем не менее, они действуют.

А как же этот вопрос решается в лагранжевой механике?

Элементарно. В лагранжевой механике основные уравнения движения – это уравнения Лагранжа – Даламбера, т.е. принцип Даламбера (о включении в уравнения движения инерциальных сил) заложен изначально. Поэтому нет явных различий инерциальных систем отсчета от неинерциальных. Этого просто не требуется, различия получаются при решении конкретных задач, если выбранная система отсчета (СО) оказывается инерциальной, то просто члены уравнений движения ответственные за инерциальные силы оказываются равны нулю. Именно поэтому в лагранжевой механике нет четкого разделения ИСО – неИСО, также нет явного аналога первого закона Ньютона, закона инерции Галилея. И благодаря этому любые координаты в лагранжевой механике оказываются обобщенными.

Ранее мы уделили целую главу своей монографии² вопросу о действии инерциальных сил на движущееся тело и на многочисленных примерах доказывали, что на тело, которое движется прямолинейно и при этом вращается вокруг своей оси, действуют и центробежные силы Кориолиса, т.е. необходимо обобщать уравнения Ньютона до уравнений Даламбера с учетом действия сил инерции. То же самое можно сказать и другими словами: необходимо в ньютоновскую механику, аналогично лагранжевой вводить принцип Даламбера изначально, а не по мере необходимости при рассмотрении неинерциальных движений.

Об истинном и видимом движении

Следующее, что необходимо рассмотреть, это различие истинного и кажущегося движений. Идея необходимости различения истинных и видимых движений в современной науке принадлежит Е.С.Ворсобину (устное сообщение). Вопрос кажется простым на бытовом уровне, но не в науке.

В науке исключительное место занимает теория относительности, в которой все движения рассматриваются как относительные (отсюда и название), и, по выражению Эйлера, «ясно, что это состояние относительного движения или покоя может определяться бесчисленным количеством способов: например, если мы будем брать разные пространства, по отношению к которым будем судить о движении и покое, то у нас будут получаться разные относительные движения и разные состояния относительного покоя»³.

Таким образом, различие движения от покоя заключается только в точке зрения, относительно которой рассматривается движение и покой.

Ньютон понимал этот вопрос по-другому:

«Распознавание истинных движений отдельных тел и точное их разграничение от кажущихся весьма трудно, ибо части того неподвижного пространства, о котором говорилось и в котором совершаются истинные движения тел, не ощущаются нашими чувствами. Однако это дело не вполне безнадежное. Основания для суждений можно заимствовать частью из кажущихся движений, представляющих разности ис-

¹ Ковалевская С.В. Научные труды. М.: Академия наук СССР, 1948. С. 91.

² Кочетков А.В. Проявления исторического мышления в современной физике (Лекции для непрофессионалов) / А.В. Кочетков, П.В. Федотов. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2001. С. 8–40.

³ Эйлер Л. Основы динамики точки. Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1938. С. 45.

тинных, частью из сил, представляющих причины и проявления истинных движений. Так, если два шара, соединенные нитью на данном друг от друга расстоянии, будут обращаться около общего их центра тяжести, то по натяжению нити можно будет узнать стремление шаров к удалению от оси вращения и по нему вычислить угловую его скорость. Если затем на противоположные стороны шаров заставить действовать равные силы, так чтобы они или увеличивали, или уменьшали, круговращательное движение, то по увеличившемуся или по уменьшившемуся натяжению нити может быть обнаружено увеличение или уменьшение скорости движения, и таким образом можно будет найти те стороны шаров, к которым надо приложить силы, чтобы увеличение скорости движения стало наибольшим, и значит, найти те стороны шаров, которые обращены по направлению движения или по направлению, ему обратному. Когда эти передние и задние стороны будут найдены, то и движение будет вполне определено.

Таким способом могло бы быть определено количество и направление кругового движения внутри огромного пустого пространства, где не существовало бы никаких внешних доступных чувствам признаков, к которым можно было бы относить положения шаров. Если бы в этом пространстве, кроме того, находились бы еще некоторые весьма удаленные тела, сохраняющие относительные друг к другу положения, подобно тому, как наши неподвижные звезды, то по перемещению шаров относительно этих тел мы не могли бы определить, чему принадлежит это перемещение – телам или шарам. Но если бы мы, определив натяжение нити, нашли бы, что это натяжение как раз соответствует движению шаров, то мы бы заключили, что движение принадлежит шарам, а не внешним телам, и что эти тела находятся в покое. Таким образом, по видимому перемещению шаров относительно внешних тел мы вывели бы их движение. Нахождение же истинных движений тел по причинам, их производящим, по их проявлениям и по разностям кажущихся движений и, наоборот, нахождение по истинным или кажущимся движениям их причин и проявлений излагаются подробно в последующем. Именно с этой-то целью и составлено предлагаемое сочинение»¹.

Как видно из приведенной цитаты, мы опять сталкиваемся с пониманием инерциального и неинерциального движений. Согласно Ньютону, истинным является движение относительно ИСО. Если рассматривать движение в неИСО, то появляются инерциальные силы, не вызванные внешним воздействием, что и позволяет отличить истинное движение от кажущихся движений.

Чтобы понять, почему необходимо отличать истину от видимости, приведем пример задачи:

В центре комнаты на вращающемся стуле крутится наблюдатель. Он видит, что все предметы в комнате вертятся относительно него. Если принять, что вся комната вращается вокруг наблюдателя, то необходимо признать, что на все предметы в комнате действует центробежная сила, которая должна отбрасывать незакрепленные предметы от наблюдателя на периферию. Однако этого не происходит. Значит, круговое движение окружающих предметов кажущееся, а истинным является вращение самого наблюдателя.

Мы привели этот пример, чтобы указать, что не всегда любое движение можно считать относительным, волею определяя, что относительно чего движется и перемещается.

Надо четко указать, что отличия истинного и кажущихся движений проявляются только при учете сил, т.е. в динамике. Напротив, в кинематике, когда силы не принимаются в расчет, вполне можно рассматривать движение относительно любой СО, без различия истинных движений от неистинных. То есть теории относительности (любые) имеют четко ограниченную область действия, они правомерны только в кинематике, когда не учитываются силы, действующие в рассматриваемой системе. Этот простой вывод имеет и продолжение: т.к. работа – это произведение действующей силы на расстояние, пройденное под действием силы, то в кинематике, а, значит, и в ТО неправомерно рассматривать и рассчитывать работу и энергию в системе.

Физика и математика: две точки зрения

Разберемся в следующем вопросе. Принято считать, что ньютоновская механика является частным случаем лагранжевой или гамильтоновой механики, ввиду того, что и лагранжева и гамильтонова механика рассматривает движения механической системы в более общем виде. В некотором смысле это так, но не совсем. Рассмотрим две точки зрения.

«В настоящее время аналитическая механика входит в программы механико-математических и физических факультетов университетов как часть общего курса теоретической механики. Аналитическая механика входит также в программы по дополнительным главам курса теоретической механики для машиностроительных и механических факультетов ВТУЗов»². Интересно, что аналитическая механика обязательно входит в курсы обучения математиков и физиков, и только дополнительно (факультативно) в курс подготовки механиков и машиностроителей. И этому есть логичное объяснение. «По установившейся традиции в аналитическую механику обычно включают вариационные принципы, общие уравнения движения голономных и неголономных систем, различные методы интегрирования этих уравнений, канонические преобразования, интегральные инварианты и ряд других вопросов»³.

В настоящее время принято считать, что физика настолько математическая, что в методологическом плане практически не различают эти две науки. Тем не менее, это две разные науки и в действительности методология у них разная, исходя из разности объектов рассмотрения и решаемых задач.

«Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира»⁴.

«Физика – наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности природы, свойства и строение материи, и законы её движения»⁵.

Причем, с одной стороны, «в своей основе физика – экспериментальная наука: её законы базируются на

¹ Ньютон И. Математические начала натуральной философии / Пер. А.Н. Крылова. М.: Наука, 1989. С. 36.

² Беленький И.М. Введение в аналитическую механику. М.: Высшая школа. 1964. С. 3.

³ Там же. С. 3.

⁴ Математическая энциклопедия... Т. 2. С. 559.

⁵ Физическая энциклопедия... Т. 5. С. 312.

фактах, установленных опытным путем. Эти законы представляют собой строго определенные соотношения и формулируются на математическом языке»¹ и т.о., физика относится к точным наукам и изучает количественные закономерности явлений, с другой стороны, «в начале 19 в. происходит новое значительное расширение области приложений математического анализа. Если до этого времени основными разделами физики, требовавшими большого математического аппарата, оставались механика и оптика, то теперь к ним присоединяются электродинамика, теория магнетизма и термодинамика»².

По определению, физика неотделима от явлений и свойств, от природы и материи, математика изучает количественные отношения, т.е. числа, которых в природе в действительности нет, а существуют они только в умах людей, иными словами, в абстракции. **Таким образом, физика – это наука о реальной природе, а математика – наука об абстрактных численных соотношениях.**

Но традиции преподавания современной механики явно путают эти понятия:

«Следуя Феликсу Клейну³, аналитическую механику можно рассматривать как учение о дифференциальных уравнениях и траекториях произвольных механических систем.

Началу такому пониманию было положено Лагранжем в его знаменитой «Аналитической механике».

В основе аналитической механики лежат общие принципы (как дифференциальные, так и интегральные вариационные принципы), обладающие большой общностью. Из них выводятся уравнения движения механических систем.

Одной из особенностей методов аналитической механики является применение обобщенных координат. Описание движения, при котором, не отдается предпочтения какой либо определенной системе координат, обладает большой универсальностью и имеет целый ряд преимуществ, которые сразу же обнаруживаются при решении физических и технических задач»⁴.

Несмотря на то, что физика и математика неотделимы друг от друга, как сиамские близнецы, тем не менее, их необходимо четко различать. Хотя бы потому, что идеи, лежащие в основе этих двух наук, разные, отсюда и разные подходы в решении стоящих задач, а соответственно, и способы мышления: «Переходя в область физики, нужно отказаться от того особого рода уверенности, которой требуют математики. Мы должны удовлетвориться вероятным. Исчисление вероятностей играет необходимую роль, и я показал, что во всякой индукции производят бессознательное вычисление вероятностей»⁵.

И дело здесь не только и не столько в математической теории вероятностей, потому что далее Пуанкаре пишет:

«Физик не мог бы удовлетвориться голым экспериментом. Его объект не тот же, что у историка, и отдельный факт не имеет для него цены. Отсюда полезность обобщения, которое требуют математики. Это обобщение предполагает некоторую веру в простоту и единство природы. Эта вера справедлива она или нет, необходима для науки.

Впрочем, невозможно было бы обойтись без гипотез, и часто ложные гипотезы оказывали больше услуг, чем верные. Чтобы извлечь пользу из этих гипотез, пытались разложить наблюдаемое сложное явление на большое число элементарных явлений, повинующихся одним и тем же законам. Именно таким образом стала возможна математическая физика»⁶.

Вот так: физика невозможна без веры и большого количества, часто ложных, гипотез. Причем интересно, как Пуанкаре относится к гипотезам:

«В физических теориях нужно различать основу и форму. Основа – это существование некоторых связей между недоступными объектами. Эти связи – единственная реальность, которой можно достичь, и все, что мы можем спросить – такие же ли связи между реальными объектами и между образами, которые мы ставим на их место.

Форма – лишь род одежды, которую мы набрасываем на этот скелет. Эту одежду мы меняем часто, к удивлению остальных людей, у которых это непостоянство вызывает улыбку и которые объявляют банкротство науки. Но если часто меняется форма, основное остается.

Гипотезы относительно того, что я назвал формой, не могут быть истинными или ложными, они могут быть лишь удобными или неудобными. Например, существование эфира, так же, как и внешних объектов, является лишь удобной гипотезой»⁷.

Прекрасный анализ этих двух точек зрения, а точнее, двух способов мышления дал Пуанкаре в статье «Электричество и оптика»:

«Когда французский читатель впервые открывает книгу Максвелла, к испытываемому им восхищению примешивается чувство беспокойства и зачастую даже недоверия, от которого удаётся отделаться нескоро и лишь ценой значительных усилий. Некоторые выдающиеся умы сохранили это впечатление навсегда.

Почему же, однако, идеи английского ученого воспринимаются у нас с таким трудом? Причина этого, несомненно, заключается в том, что образование, получаемое большинством французов, развивает в них склонность к тому, чтобы ценить, прежде всего, логичность и точность.

С этой точки зрения старые теории математической физики вполне нас удовлетворяли. Таков был метод всех наших учителей, начиная от Лапласа и кончая Коши. Исходя из точно сформулированных гипотез, они с математической точностью выводили из них следствия, которые затем сравнивали с опытом [курсив наш –

¹ Там же. С. 310.

² Математическая энциклопедия... Т. 2. С. 563.

³ Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. 1. М.: ОНТИ, 1937. С. 232.

⁴ Физический энциклопедический словарь... С. 3.

⁵ Пуанкаре А. Избранные труды // Соч.: В 3 т. Т. 2. С. 659.

⁶ Там же. С. 659

⁷ Там же.

А.К., П.Ф.]. Они как бы стремились придать всем областям физики точность небесной механики.

Ум, воспитанный на подобных образцах, предъявляет ко всякой теории чрезвычайно строгие требования. Его не только возмущает малейшая видимость противоречия, но он требует также строгой логической связи между отдельными частями и минимального числа строго разграниченных гипотез» [курсив наш –А.К., П.Ф.]»¹.

Заметим, что в число учителей не входят Ньютон, Декарт и некоторые другие выдающиеся умы. Не зря Лапласа и других «учителей» Пуанкаре называет «геометрами», определяя в качестве идеала научного творчества геометрию Евклида.

Таким образом, то, что называется математической физикой, физикой не является, на самом деле это раздел математики, такой же, как *теория игр, теория автоматов и др.*

Исторически сложилось, что вместо физики на курсах аналитической механики преподают на самом деле математические дисциплины. Это само по себе было бы не страшно, если бы компенсировалось соответствующими отступлениями по воспитанию физического мышления, которое в принципе отлично от математического. Но этого не делается, более того, иногда в шутку, иногда всерьез приводится фраза о том, что в каждой науке столько науки, сколько в ней математики. Отсюда курс на сплошную математизацию науки, что имеет кроме положительных еще и отрицательные стороны.

Так, в физике всегда существовали факты, которые либо не укладываются в стройные математические теории своего времени, либо вовсе им противоречат. На этих фактах появляются новые теории, но построить всеобъемлющую теорию, которая сразу, в момент создания, была бы совершенна в математическом плане, невозможно, поэтому новые теории в физике с трудом пробивают себе дорогу, если они не пользуются разделами математики, уже достаточно разработанными к моменту их создания.

Например, общая теория относительности использует теорию тензорного анализа, разработанную в 19 веке, в том числе и в развитие теории электромагнитного поля Максвелла, матричная механика Гейзенберга использует достижения матричного исчисления, достаточно разработанное к началу 20 века (на момент появления теории Гейзенберга), что в большой степени способствовало быстрому распространению матричной механики.

Но если соответствующий математический аппарат недостаточно развит, либо невозможно применить какие-либо математические теории, то физическая теория либо очень долго пробивает себе дорогу, как теория Максвелла, либо вовсе отвергается. В этом главный недостаток математизации, точнее, подмены физики математикой.

Необходимо четко понимать, что физика и математика – это в принципе разные науки, взаимосвязанные, но независимые. В физике, как в науке естественной, возможно появление гипотез и теорий без математики, только описательных, математическое обеспечение появляется потом, когда будет собран необходимый экспериментальный материал, а в случае необходимости – и соответствующие математические формулы, теоремы, а может быть, и новый раздел математики, как это не раз бывало в истории физики и математики.

Нельзя требовать от физических теорий сразу полной разработки математического аппарата. Физика не разрабатывает математику, а только представляет заказ на математический аппарат.

Физическое и математическое мышление различаются в принципе. Математическое мышление основывается на аксиомах, выраженных в математических терминах (лучше в виде математических формул) и ищет связи между математическими формулами, описывающими объекты, и если нет формул, математику не о чем и думать.

Физик свободно обходится без формул, прекрасный этому пример – Майкл Фарадей, который является автором физической теории, но современной ему математики он практически не знал. Даже получив степень доктора наук и став профессором, Майкл Фарадей постоянно на лекциях путался в математических выводах, о чем очень много шуток в книгах по истории науки. Причем Фарадей читал лекции не о каких-то других физических теориях, которых он мог не знать, а по теории электромагнетизма, одним из авторов которой он сам и являлся и не знать которую в совершенстве просто не мог.

Известны и другие случаи. Например, теория электромагнитного поля была выражена Максвеллом в виде 13 постулатов, написанных словами, и только 3 из них были дополнены формулами, известными на момент написания работы, причем другими физиками. Это закон Кулона, закон Фарадея и закон Ампера. А известные в настоящий момент 4 формулы теории Максвелла были разработаны значительно позднее, уже в 20 веке Хевисайдом, хотя и носят имя Максвелла.

Все дело в том, что математически описать теорию Максвелла в элегантной форме 4 уравнений стало возможно только после того, как в математике было разработано операторное исчисление, причем не просто введено понятие операторов, что уже само по себе достаточно гениально, но и разработан целый математический раздел. При этом именно теория Максвелла во многом подталкивала математиков к разработке новых методов. Таким образом, если бы Джеймс Кларк Максвелл мыслил бы только математическими формулами (которых еще не было и главное быть не могло), то теории электромагнитного поля могло бы не существовать до сих пор².

Но подмена физики математикой вредит не только физике, но и самой математике. Все дело в том, что физика – это питательная среда для развития математики, математика, замкнутая сама на себя, превращается в схоластику; лишенная возможности получения новых идей из физики, она переходит к жеванию пережеванного, вместо разработки нового – к пересмотру и разработке новых методов решения уже решенных задач. Процесс, в принципе, полезный, но все хорошо в меру.

Математика может развить и помочь уточнить физические теории, именно помочь, а не уточнить – потому, что математика может только подсказать где в теории неточность, но не может ни поставить эксперимент, ни даже указать, какие эксперименты необходимы. Эксперимент – это прерогатива физики. Но новых экспериментов не поставить, если нет новых идей, отсюда возникает необходимость гипотез, пусть даже ложных,

¹ Там же. С. 413.

² Кочетков А.В. Проявления исторического мышления в современной физике... 176 с.; Кочетков А.В., Федотов П.В. Анализ понятия «пространство» в общей теории относительности // *Пространство и Время*. 2012. № 4(10). С. 42–49; Они же. Специальная теория относительности А. Эйнштейна: комментарии и сомнения // *Пространство и Время*. 2013. № 1(11). С. 49–57.

главное – новых. А это уже физическое мышление, его невозможно заменить математическим.

Именно поэтому в физике в последнее время наблюдается застой, нет новых теорий, а есть новые приложения старых теорий. Термин «фундаментальная наука» подменяется термином «прикладная наука». Исследования новых областей приложения теорий к практике подменяют фундаментальные исследования.

Открытия, имеющие громадное значение для практического хозяйства, объявляются фундаментальными, физиков низводят до уровня инженеров, которые должны разрабатывать новые приборы и машины и улучшать существующие, используя достижения теоретической науки. При этом не совсем понятно, куда в этом случае деваться инженерам, если их место занимают ученые.

Выводы

1. В физику необходимо вернуть физику. Это не тавтология, так как то, что в настоящее время называется физикой, в большей степени представляет собой математику, а обучение физике подменяет собой обучение математическим теориям.

2. Лагранжева и гамильтонова механика – это в действительности разделы математики, а не физики, как это принято считать в настоящее время. Единственно физическая теория в механике – это ньютоновская механика.

3. Разделы аналитической механики должны занять достойное место среди математических дисциплин, таких как теории игр, теория автоматов, теории автоматического управления и т.д.

4. Математическое мышление тяготеет к математическим формулам, если нет формул, то математику не о чем думать, если только о том, как описать явление математически. Физик больше мыслит образами природных явлений, а математика ему нужна только для доказательства, что он на верном пути. Но если нет формул, для физика нет ничего страшного, просто математика еще на марше и в свое время подтянется.

5. Необходимо перестать путать фундаментальную физику и прикладную науку. Инженер – это уважаемая профессия, и нет необходимости человека, занятого изобретением новых машин и устройств или улучшением характеристик существующих, называть научным сотрудником, даже если он занимается усовершенствованием самого научного оборудования.

6. В физике необходимы новые гипотезы, пусть даже потом они будут опровергнуты. Довод, что данная гипотеза противоречит современным учебникам (любимый довод современных методистов), должен быть вычеркнут из списка возражений.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
Arnol'd V.I. (1989). Matematicheskie metody klassicheskoi mekhaniki. Nauka, Moskva. 472 p.
- 2 Бельский И.М. Введение в аналитическую механику. М.: Высшая школа. 1964. 324 с.
Belen'kii I.M. (1964). Vvedenie v analiticheskuyu mekhaniku. Vysshaya shkola, Moskva. 324 p.
- 3 Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.: ОНТИ, 1937. Ч. 1. 436 с.
Klein F. (1937). Lektsii o razvitií matematiki v XIX stoletii. Ch. 1. ONTI, Moskva. 436 p.
- 4 Ковалевская С.В. Научные труды. М.: Академия наук СССР, 1948. 370 с.
Kovalevskaya S.V. (1948). Nauchnye trudy. Akademiya nauk SSSR, Moskva. 370 p.
- 5 Кочетков А.В. Проявления исторического мышления в современной физике (Лекции для непрофессионалов) / А.В. Кочетков, П.В. Федотов. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2001. 176 с.
Kochetkov A.V. (2001). Proyavleniya istoricheskogo myshleniya v sovremennoi fizike (Lektsii dlya neprofessionalov). A.V. Kochetkov, P.V. Fedotov. Sarat. gos. tekhn. un-t, Saratov. 176 p.
- 6 Кочетков А.В., Федотов П.В. Анализ понятия «пространство» в общей теории относительности // Пространство и Время. 2012. № 4(10). С. 42–49.
Kochetkov A.V., Fedotov P.V. (2012). Analiz ponyatiya «prostranstvo» v obshchei teorii otноситel'nosti. Prostranstvo i Vremya. N 4(10). Pp. 42–49.
- 7 Кочетков А.В., Федотов П.В. Специальная теория относительности А. Эйнштейна: комментарии и сомнения // Пространство и Время. 2013. № 1(11). С. 49–57.
Kochetkov A.V., Fedotov P.V. (2013). Spetsial'naya teoriya otноситel'nosti A. Einsteina: kommentarii i somneniya. Prostranstvo i Vremya. N 1(11). Pp. 49–57.
- 8 Маркеев А.П. Теоретическая механика. Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 1999. 570 с.
Markeev A.P. (1999). Teoreticheskaya mekhanika. Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika, Izhevsk. 570 p.
- 9 Математическая энциклопедия: В 5 т. / Гл. ред. И.М. Виноградов. Т. 2. М.: Советская энциклопедия. 1979. 1164 с.
Matematicheskaya entsiklopediya: V 5 t. Gl. red. I.M. Vinogradov. T. 2. Sovetskaya entsiklopediya, Moskva. 1979. 1164 p.
- 10 Ньютон И. Математические начала натуральной философии / Пер. А.Н. Крылова. М.: Наука. 1989. 662 с.
N'yuton I. (1989). Matematicheskie nachala natural'noi filosofii. Per. A.N. Krylova. M.: Nauka. 1989. 662 p.
- 11 Остроградский М.В. Избранные труды. М.: АН СССР, 1958. 583 с.
Ostrogradskii M.V. (1958). Izbrannye trudy. AN SSSR, Moskva. 583 p.
- 12 Пуанкаре А. Избранные труды // Соч.: В 3 т. Т. 2. М.: Наука, 1972. 999 с.
Puankare A. (1972). Izbrannye trudy. In: Koch.: V 3 t. T. 2. Nauka, Moskva. 1972. 999 p.
- 13 Пуанкаре А. О Науке / Пер. с фр. М.: Наука, 1983. 560 с.
Puankare A. (1983). O Nauke. Per. s fr. Nauka, Moskva. 560 p.
- 14 Физическая энциклопедия: В 5 т. Т. 3. М.: Большая Российская энциклопедия. 1992. 672 с.
Fizicheskaya entsiklopediya: V 5 t. T. 3. Bol'shaya Rossiiskaya entsiklopediya, Moskva. 1992. 672 p.
- 15 Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М. Прохоров. М.: Большая Советская Энциклопедия. 1995. 928 с.
Fizicheskii entsiklopedicheskii slovar'. Gl. red. A.M. Prokhorov. Bol'shaya Sovetskaya Entsiklopediya, Moskva. 1995. 928 p.
- 16 Эйлер Л. Основы динамики точки. Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1938. 502 с.
Eiler L. (1938). Osnovy dinamiki tochki. ONTI NKTP SSSR, Moskva. 502 p.