

13. Evans M.W. "O(3) Electrokinetics." *Modern Nonlinear Optics*. New York: John Wiley and Sons Inc., 2001, part ii. 79–268.
14. Heaviside O. "A Gravitational and Electromagnetic Analogy. Part I." *The Electrician* 31 (1893): 281–282.
15. Heaviside O. "A Gravitational and Electromagnetic Analogy. Part II." *The Electrician* 31 (1893): 359.
16. Heaviside O. *Electromagnetic Theory*. London: The Electrician Printing and Publishing Co., Ltd., 1893, volume 1. 466 p.
17. Heaviside O. "On the Best Arrangement of Wheatstone's Bridge for Measuring a Given Resistance with a Given Galvanometer and Battery." *Philosophical Magazine* 45.298 (1873): 114–120.
18. Hertz H.R. *Electric Waves: Being Researches on the Propagation of Electric Action with Finite Velocity Through Space*. London: Macmillan, 1893. 310 p.
19. Jefimenko O.D. *Causality, Electromagnetic Induction, and Gravitation: A Different Approach to the Theory of Electromagnetic and Gravitational Fields*. 2nd ed. Star City: Electret Scientific Company, 2000 212 p.
20. Mashhoon B., Gronwald F., Lichtenegger H.I.M. "Gravitomagnetism and the Clock Effect." *Lecture Notes in Physics* 562 (2001): 83–108.
21. Maxwell J.C. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Oxford: Clarendon Press, 1873, volume I. 499 p.
22. Maxwell J.C. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. 2nd ed. Oxford: Clarendon Press, 1881, volume I. 464 p.
23. Nahin P.J. *Oliver Heaviside: The Life, Work, and Times of an Electrical Genius of the Victorian Age*. Baltimore and London: John Hopkins University Press, 2002. 320 p.

Цитирование по ГОСТ Р 7.0.11—2011:

Геворкян, С. Г. «Первый из последователей Максвелла»: к прочтению статьи Оливера Хевисайда «Гравитационная и электромагнитная аналогия» (1893) / С.Г. Геворкян // *Пространство и Время*. — 2017. — № 2-3-4(28-29-30). — С. 75—80. Стационарный сетевой адрес: 2226-7271provkr\_st2\_3\_4-28\_29\_30.2017.23.

## НАУЧНЫЙ АРХИВ

УДК 52-336:52-337: 531.5:537.8



Heaviside O.

Хевисайд О.

### A Gravitational and Electromagnetic Analogy

### Гравитационная и электромагнитная аналогия

Oliver Heaviside, FRS (1850–1925), an English electrical engineer, mathematician, and physicist

Оливер Хевисайд (1850–1925), английский инженер, математик и физик, действительный член Британского научного Королевского общества

Редакция журнала «Пространство и Время» представляет перевод опубликованной в 1893 г. статьи О. Хевисайда (1850–1925), выполненный кандидатом физико-математических наук С.Г. Геворкяном. Перевод публикуется впервые.

**Ключевые слова:** гравитация; электромагнетизм; гравитационная и электромагнитная аналогия; распространение волн; закон Ньютона; уравнения Максвелла.

#### PART I

[*The Electrician* 31 (1893): 281–282]

To form any notion at all of the flux of gravitational energy, we must first localise the energy. In this respect it resembles the legendary hare in the cookery book. Whether the notion will turn out to be a useful one is a matter for subsequent discovery. For this, also, there is a well-known gastronomical analogy.

#### ЧАСТЬ I

[*The Electrician* 31 (1893): 281–282]

Чтобы высказать некое мнение о потоке гравитационной энергии, мы должны сначала дать определение энергии. В этом отношении она напоминает легендарного зайца из поваренной книги. Окажется ли этот взгляд полезным – это предмет для последующих исследований. Для этого случая также есть известные гастрономические аналогии.

Now, bearing in mind the successful manner in which Maxwell's localisation of electric and magnetic energy in his ether lends itself to theoretical reasoning, the suggestion is very natural that we should attempt to localise gravitational energy in a similar manner, its density to depend upon the square of the intensity of the force, especially because the law of the inverse squares is involved throughout.

Certain portions of space are supposed to be occupied by matter, and its amount is supposed to be invariable. Furthermore, it is assumed to have personal identity, so that the position and motion of a definite particle of matter are definite, at any rate relative to an assumed fixed space. Matter is recognised by the property of inertia, whereby it tends to persist in the state of motion it possesses; and any change in the motion is ascribed to the action of force, of which the proper measure is, therefore, the rate of change of quantity of motion, or momentum.

Let  $\rho$  be the density of matter, and  $\vec{e}$  the intensity of force, or the force per unit matter, then

$$\vec{F} = \vec{e}\rho \quad (1)$$

expresses the moving force on  $\rho$ , which has its equivalent in increase of the momentum. There are so many forces nowadays of a generalised nature, that perhaps the expression "moving force" may be permitted for distinctness, although it may have been formerly abused and afterwards tabooed.

Now the force  $\vec{F}$ , or the intensity  $\vec{e}$ , may have many origins, but the only one we are concerned with here is the gravitational force. This appears to depend solely upon the distribution of the matter, independently of other circumstances, and its operation is concisely expressed by Newton's law, that there is a mutual attraction between any two particles of matter, which varies as the product of their masses and inversely as the square of their distance. Let  $\vec{e}$  now be the intensity of gravitational force, and  $\vec{F}$  the resultant moving force, due to all the matter. Then  $\vec{e}$  is the space-variation of a potential, say,

$$\vec{e} = \nabla P, \quad (2)$$

and the potential is found from the distribution of matter by

$$P = Pot \frac{\rho}{c} =, \sum \frac{\rho}{4\pi c r} \quad (3)$$

where  $c$  is a constant. This implies that the speed of propagation of the gravitative influence is infinitely great.

Теперь, помня об успешном подходе, использованном Максвеллом при определении электрической и магнитной энергии в его теоретических рассуждениях об эфире, представляется очень естественным, если мы попытаемся описать гравитационную энергию таким образом, чтобы ее плотность зависела от квадрата интенсивности силы, тем более, что закон обратных квадратов используется повсеместно.

Определённая часть пространства предполагается заполненной материей, и сумма её должна быть неизменной. Кроме того, предполагается существование индивидуальной определенности, так, чтобы положение и движение определенной материальной частицы были определены, во всяком случае, относительно выделенной определённой части пространства. Масса определяется через свойство инерции, благодаря которой тело, как правило, сохраняет то состояние движения, которым оно обладает; а любое изменение движения обусловлено действием сил, от которых соответствующим образом зависит скорость изменения количества движения, или импульса.

Пусть  $\rho$  – плотность вещества, а  $\vec{e}$  – интенсивность силы, то есть, это сила, действующая на единицу массы, тогда выражение

описывает действующую (движущую) на (массу)  $\rho$  силу, которая находит своё эквивалентное проявление в увеличении (изменении) импульса. В наши дни есть так много сил обобщенной природы, что, пожалуй, выражение «движущая сила» может быть допущено для большей ясности изложения, хотя, возможно, раньше оно (это выражение) могло подвергаться суровой критике, а затем и табуировано.

Итак, сила  $\vec{F}$ , или интенсивность  $\vec{e}$ , могут иметь различное происхождение, но единственное, что нас интересует, это – гравитационная сила. Она, как представляется, зависит исключительно от распределения материи, независимо от других обстоятельств, и её действие в лаконичной форме описывается законом Ньютона, согласно которому она есть сила взаимного притяжения любых двух материальных частиц, которая меняется пропорционально произведению их масс и обратно пропорционально квадрату расстояния между ними. Допустим теперь, что  $\vec{e}$  – интенсивность гравитационной силы, а  $\vec{F}$  – результирующая движущая сила, действующая на всю материю. Тогда  $\vec{e}$  – это пространственное изменение потенциала, то есть

а потенциал ( $P$ ) находится из распределения материи с помощью соотношения

где  $c$  – постоянная величина. Здесь подразумевается, что скорость распространения гравитационного воздействия является бесконечно большой.

Now when matter is allowed to fall together from any configuration to a closer one, the work done by the gravitational force is expressed by the increase made in the quantity  $\sum(\rho P/2)$ . This is identically the same as the quantity  $\sum(ce^2/2)$  summed through all space. If, for example, the matter be given initially in a state of infinitely fine division, infinitely widely separated, then the work done by the gravitational force in passing to any other configuration is  $\sum(\rho P/2)$  or  $\sum(ce^2/2)$ , which therefore expresses the “exhaustion of potential energy.” We may therefore assume that  $ce^2/2$  expresses the exhaustion of potential energy per unit volume of the medium. The equivalent of the exhaustion of potential energy is, of course, the gain of kinetic energy, if no other forces have been in action.

We can now express the flux of energy. We may compare the present problem with that of the motion of electrification. If moved about slowly in a dielectric, the electric force is appreciably the static distribution. Nevertheless, the flux of energy depends upon the magnetic force as well. It may, indeed, be represented in another way, without introducing the magnetic force, but then the formula would not be sufficiently comprehensive to suit other cases. Now what is there analogous to magnetic force in the gravitational case? And if it have its analogue, what is there to correspond with electric current? At first glance it might seem that the whole of the magnetic side of electromagnetism was absent in the gravitational analogy. But this is not true.

Thus, if  $\vec{u}$  is the velocity of  $\rho$ , then  $\rho\vec{u}$  is the density of a current (or flux) of matter. It is analogous to a convective current of electrification. Also, when the matter enters any region through its boundary, there is a simultaneous convergence of gravitational force into that region proportional to  $\rho$ . This is expressed by saying that if

$$\vec{C} = \rho\vec{u} - c \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}, \quad (4)$$

then  $\vec{C}$  is a circuital flux. It is the analogue of Maxwell's true current; for although Maxwell did not include the convective term  $\rho\vec{u}$ , yet it would be against his principles to ignore it. Being a circuital flux, it is the curl of a vector, say

$$\nabla \times \vec{h} = \rho\vec{u} - c \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}. \quad (5)$$

This defines  $\vec{h}$  except as regards its divergence, which is arbitrary, and may be made zero. Then  $\vec{h}$  is the analogue of magnetic

Теперь, когда материальные тела могут падать совместно в любой конфигурации, то работа, выполненная гравитацией по их притяжению, будет выражаться величиной, равной  $\sum(\rho P/2)$ . Это буквально то же самое, что выражение  $\sum(ce^2/2)$ , суммируемое по всему пространству. Если, например, материя изначально задаётся в виде равномерно распределённого бесконечного множества материальных точек, отстоящих бесконечно далеко друг от друга, то работа, проделанная гравитационными силами при переходе к любой другой конфигурации, будет равна  $\sum(\rho P/2)$  или  $\sum(ce^2/2)$ , что, соответственно, выражает «расходование потенциальной энергии». Поэтому мы можем предположить, что  $ce^2/2$  выражает расходование потенциальной энергии на единицу объёма среды. Эквивалентом расходования потенциальной энергии является, разумеется, прирост кинетической энергии, если при этом не задействованы какие-либо другие силы.

Теперь мы можем получить выражение для потока энергии. Мы можем сравнить данную задачу с таковой о движении под действием электрической силы. Если медленно двигаться в диэлектрической среде, то заметим, что электрическая сила будет стационарной. Тем не менее, поток энергии зависит также от магнитных сил. На самом деле, можно его представить и другим образом, без введения магнитных сил, но тогда формула будет недостаточно широкой, чтобы быть применимой и в других случаях. Итак, что является аналогом магнитной силы в гравитационном случае? И если она имеет свои аналоги, то что же является аналогом электрического тока? На первый взгляд может показаться, что в гравитационной аналогии отсутствует вся магнитная составляющая электромагнетизма. Но это не так.

Таким образом, если  $\vec{u}$  – скорость (единичного объёма массой)  $\rho$ , тогда  $\rho\vec{u}$  – это плотность тока (или потока) материи. Это и есть аналог конвективного электрического тока. К тому же, когда материя проникает в какую-либо область через её границы, при этом одновременно происходит схождение гравитационных сил в этой области пропорционально  $\rho$ . Это выражается в том, что если

то тогда  $\vec{C}$  – это циркуляция потока. Это аналог тока Максвелла; и хотя Максвелл не вводил конвективную составляющую  $\rho\vec{u}$ , всё же игнорировать её было бы против его принципов. Поскольку циркуляция потока есть ротор вектора, то можем сказать, что

Это соотношение определяет  $\vec{h}$ , за исключением касающегося его дивергенции, которая является произвольной величиной и может быть принята равной

force, for it bears the same relation to flux of matter as magnetic force does to convective current. We have

$$\vec{h} = \nabla \times (\text{Pot}\vec{C}) = \nabla \times \vec{A}, \quad (6)$$

if  $\vec{A} = \text{Pot}\vec{C}$ .

But, since instantaneous action is here involved, we may equally well take

$$\vec{A} = \text{Pot}(\rho\vec{u}), \quad (7)$$

and its curl will be  $\vec{h}$ . Thus, whilst the ordinary potential P is the potential of the matter, the new potential  $\vec{A}$  is that of its flux.

Now if we multiply (5) by  $\vec{e}$ , we obtain

$$\vec{e} \cdot (\nabla \times \vec{h}) = \vec{e} \cdot (\rho\vec{u}) - \vec{e} \cdot c \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}, \quad (8)$$

or, which is the same,

$$\nabla \cdot (\vec{e} \times \vec{h}) = \vec{F} \cdot \vec{u} - \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (9)$$

if  $U = ce^2/2$ . But  $\partial U/\partial t$  represents the rate of exhaustion potential energy, so  $-\partial U/\partial t$  represents its rate of increase, whilst  $\vec{F} \cdot \vec{u}$  represents the activity of the force on  $\rho$ , increasing its kinetic energy. Consequently, the vector  $\vec{e} \times \vec{h}$  expresses the flux of gravitational energy. More strictly, any circuital flux whatever may be added. This  $\vec{e} \times \vec{h}$  is analogous to the electromagnetic  $\vec{E} \times \vec{H}$  found by Poynting and myself. But there is a reversal of direction. Thus, comparing a single moving particle of matter with a similarly-moving electric charge, describe a sphere round each. Let the direction of motion be the axis, the positive pole being at the forward end. Then in the electrical case the magnetic force follows the lines of latitude with positive rotation about the axis, and the flux of energy coincides with the lines of longitude from the negative pole to the positive. But in the gravitational case, although  $\vec{h}$  still follows the lines of latitude positively, yet since the radial  $\vec{e}$  is directed to instead of from the centre, the flux of energy is along the lines of longitude from the positive pole to the negative. This reversal arises from all matter being alike and attractive, whereas like electrifications repel one another.

The electromagnetic analogy may be pushed further. It is as incredible now as it was in Newton's time that gravitative influence can be exerted without a medium; and, granting a medium, we may as well consider that it propagates in time, although immensely fast. Suppose, then, instead of instantaneous action,

нулю. Тогда вектор  $\vec{h}$  есть аналог магнитной силы, ибо он имеет такое же отношение к потоку материи, как магнитная сила к конвективному току. Мы имеем

если  $\vec{A} = \text{Pot}\vec{C}$ .

Но, поскольку здесь имеют место мгновенные действия, мы можем с равным успехом принять

и его ротор будет  $\vec{h}$ . Таким образом, в то время как обычный потенциал P – это потенциал материи, то новый потенциал  $\vec{A}$  – это её поток.

Теперь, если мы умножим выражение (5) на  $\vec{e}$ , то получим

или, что то же самое,

если  $U = ce^2/2$ . Но  $\partial U/\partial t$  есть скорость расходования потенциальной энергии, то тогда  $-\partial U/\partial t$  – скорость её увеличения, в то время как  $\vec{F} \cdot \vec{u}$  – действие силы на  $\rho$ , увеличивающее её кинетическую энергию. Следовательно, вектор  $\vec{e} \times \vec{h}$  есть поток гравитационной энергии. Более строго, это некий вихревой поток, который может быть присоединён. Вектор  $\vec{e} \times \vec{h}$  – аналог электромагнитного вектора  $\vec{E} \times \vec{H}$ , открытого Пойнтингом и мною. Но здесь меняется направление. Таким образом, сравнивая движущуюся частицу единичной массы с таким же движущимся электрическим зарядом, опишем сферу вокруг каждого из них. Пусть направление движения определяется осью, положительный полюс которой находится на её переднем конце. Тогда, в электрическом случае магнитная сила будет следовать вдоль линии широты, вращаясь вокруг оси в положительном направлении, и поток энергии будет совпадать с линиями долготы в направлении от отрицательного полюса к положительному. Но в гравитационном случае, хотя  $\vec{h}$  все равно направлено вдоль по широте в положительном направлении, но так как радиальный вектор  $\vec{e}$  направлен к центру, а не от центра, то поток энергии будет идти по линии долготы от положительного полюса к отрицательному. Такое изменение направления действует на все материальные тела, к тому же и притягивая их, в то время как одноименные электрические заряды отталкиваются друг от друга.

Электромагнитная аналогия может быть распространена и дальше. Сейчас нельзя и помыслить, как это было во времена Ньютона, чтобы гравитационное воздействие проявлялось без среды-переносчика; и, вводя в рассмотрение такую среду, мы можем полагать, что это воздействие распространяется во времени, пусть даже и очень быстро. В таком случае мы принимаем

which involves

допущение, что вместо мгновенного действия, при котором выполняется условие

$$\nabla \times \vec{e} = 0, \quad (10)$$

we assert that the gravitational force  $\vec{e}$ . in ether is propagated at a single finite speed  $v$ . This requires that

гравитационная сила  $\vec{e}$  распространяется в эфире с единой конечной скоростью  $v$ . Для этого необходимо, чтобы (выполнялось соотношение)

$$v^2 \nabla^2 \vec{e} = \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2}, \quad (11)$$

for this is the general characteristic of undissipated propagation at finite speed. Now

представляющее собой общую характеристику распространения с конечной скоростью. Теперь, поскольку

$$\nabla^2 = \nabla(\nabla \cdot) - \nabla \times (\nabla \times),$$

so in space free from matter we have

то для пространства, свободного от материи, мы имеем

$$-v^2 \nabla \times (\nabla \times \vec{e}) = \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2}. \quad (12)$$

But we also have, by (5),

Но мы также имеем, согласно (5), что вдали от материальных тел выполняется соотношение

$$-\nabla \times \vec{h} = c \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \quad (13)$$

away from matter. This gives a second value to  $\partial^2 \vec{e} / \partial t^2$ , when we differentiate (13) to the time, say

Это даёт нам вторую производную  $\partial^2 \vec{e} / \partial t^2$ , когда мы дифференцируем соотношение (13) по времени:

$$\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c} \nabla \times \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}. \quad (14)$$

So, by (12) and (14), and remembering that we have already chosen  $\vec{h}$  circuital, we derive

Итак, из (12) и (14), и помня, что мы уже определили циркуляцию  $\vec{h}$ , выводим

$$c v^2 \nabla \times \vec{e} = \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}. \quad (15)$$

Or, if  $\mu$  is a new constant, such that

Или, если  $\mu$  – это новая константа, такая, что

$$\mu c v^2 = 1, \quad (16)$$

then (15) may be written in the form

то в этом случае соотношение (15) может быть записано в виде

$$\nabla \times \vec{e} = \mu \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}. \quad (17)$$

To sum up, the first circuital law (5), or

Подводя итоги, мы видим, что первый закон о циркуляции<sup>1</sup> (5), или

$$\nabla \times \vec{h} = \rho \vec{u} - c \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}, \quad (18)$$

leads to a second one, namely (17), if we introduce the hypothesis propagation at finite speed. This, of course, might be inferred from the electromagnetic case.

приводит ко второму закону о циркуляции, а именно, (17), если мы введем гипотезу о конечной скорости распространения. Это, конечно, может быть получено для электромагнитного случая.

In order that the speed  $v$  should be not less than any value that may be settled upon as the least possible, we have merely to make  $\mu$  be of

Для того, чтобы скорость  $v$  не становилась бы меньше, чем любая сколь угодно малая величина, мы просто должны потребовать, чтобы  $\mu$  было величи-

<sup>1</sup> Здесь имеется в виду теорема о циркуляции магнитного поля постоянных токов – одна из фундаментальных теорем классической электродинамики, сформулированная Андре Мари Ампером в 1826 г. (Прим. переводчика).

the necessary smallness. The equation of activity becomes, instead of (9),

$$\nabla \cdot (\vec{e} \times \vec{h}) = \vec{F}\vec{u} - \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \quad (3)$$

if  $T = \mu\vec{h}^2/2$ . The negative sign before the time-increase of this quantity points to exhaustion of energy, as before. If so, we should still represent the flux of energy by  $\vec{e} \times \vec{h}$ . But, of course,  $T$  an almost vanishing quantity when  $\mu$ , is small enough, or  $v$  big enough. Note that  $\vec{h}$  is not a negligible quantity, though the product  $\mu\vec{h}$  is. Thus results will be sensibly as in the common theory of instantaneous action, although expressed in terms of wave-propagation. Results showing signs of wave-propagation would require an inordinately large velocity of matter through the ether. It may be worth while to point out that the lines of gravitational force connected with a particle of matter will no longer converge to it uniformly from all directions when the velocity  $v$  is finite, but will show a tendency to lateral concentration, though only to a sensible extent when the velocity of the matter is not an insensible fraction of  $v$ .

The gravitational-electromagnetic analogy may be further extended if we allow that the ether which supports and propagates the gravitational influence can have a translational motion of its own, thus carrying about and distorting the lines of force. Making allowance for this convection of  $\vec{e}$  by the medium, with the concomitant convection of  $\vec{h}$ , requires us to turn the circuital laws (17), (18) to

$$\nabla \times (\vec{e} + \mu\vec{q} \times \vec{h}) = \mu \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \quad (19)$$

$$\nabla \times (\vec{h} + c\vec{e} \times \vec{q}) = \rho\vec{u} - c \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \quad (20)$$

where  $\vec{q}$  is the velocity of the medium itself.

It is needless to go into detail, because the matter may be regarded as a special and simplified case of my investigation of the forces in the electromagnetic field, with changed meanings of the symbols. It is sufficient to point out that the stress in the field now becomes prominent as a working agent. It is of two sorts, one depending upon  $\vec{e}$  and the other upon  $\vec{h}$ , analogous to the electric and magnetic stresses. The one depending upon  $\vec{h}$  is, of course, insignificant. The other consists of a pressure parallel to  $\vec{e}$  combined with a lateral tension all round it, both of magnitude  $c\vec{e}^2/2$ . This was equivalently suggested by Maxwell. Thus two bodies

ной требуемой малости. Уравнение энергии приобретает, вместо (9), вид

где  $T = \mu\vec{h}^2/2$ . Отрицательный знак перед производной по времени этой величины указывает, как и раньше, на расходование энергии. Если так, то мы по-прежнему будем представлять поток энергии как  $\vec{e} \times \vec{h}$ . Однако, разумеется, здесь  $T$  – исчезающе малая величина при достаточно малых  $\mu$ , или же при достаточно больших  $v$ . Заметим, что  $\vec{h}$  не является пренебрежимо малой величиной, хотя таковым является произведение  $\mu\vec{h}$ . Таким образом, результаты будут практически такими, как в общей теории мгновенного действия, хотя и выражены в терминах распространения волн. Результаты показывают, что волновое распространение потребовало бы от материи чрезвычайно больших скоростей движения через эфир. Может быть, стоит тогда отметить, что силовые линии гравитационного поля, связанного с материальной частицей, не будут сходиться к ней равномерно со всех сторон в случае, когда скорость  $v$  конечна, но проявят тенденцию к поперечному сгущению, которое, правда, будет ощутимо только если скорость материального тела не будет пренебрежимо малой по сравнению с  $v$ .

Гравитационно-электромагнитная аналогия может быть расширена ещё дальше, если мы допустим, что эфир, который поддерживает и передаёт гравитационное воздействие, может сам при этом совершать собственное поступательное движение, тем самым смещая и искажая силовые линии. Внесение поправок, учитывающих как это возмущение средой вектора  $\vec{e}$ , так и сопутствующее возмущение вектора  $\vec{h}$ , требует от нас представить законы циркуляции (17), (18) в виде

где  $\vec{q}$  – собственная скорость среды.

Нет необходимости вдаваться в подробности, поскольку дело может рассматриваться как частный и упрощенный случай моего исследования сил в электромагнитном поле, но при других значениях символов. Достаточно лишь отметить, что напряжение в поле теперь приобретает значение рабочего агента. Оно – двух видов, один из которых зависит от  $\vec{e}$ , а другой – от  $\vec{h}$ , аналогично электрическому и магнитному напряжениям. Тот, который зависит от  $\vec{h}$ , конечно, незначителен. Другой состоит из давления, параллельного  $\vec{e}$ , в сочетании с боковым растяжением вокруг него, обе составляющие имеют величину  $c\vec{e}^2/2$ . Подобное предположение в эквивалентной форме высказывал Максвелл. Таким образом, два тела, вместо того, что-

which appear to attract are pushed together. The case of two large parallel material planes exhibits this in a marked manner, for  $\vec{e}$  is very small between them, and relatively large on their further sides.

But the above analogy, though interesting in its way, and serving to emphasise the non-necessity of the assumption of instantaneous or direct action of matter upon matter, does not enlighten us in the least about the ultimate nature of gravitational energy. It serves, in fact, to further illustrate the mystery. For it must be confessed that the exhaustion of potential energy from a universal medium is a very unintelligible and mysterious matter. When matter is infinitely widely separated, and the forces are least, the potential energy is at its greatest, and when the potential energy is most exhausted, the forces are most energetic!

Now there is a magnetic problem in which we have a kind of similarity of behaviour, viz., when currents in material circuits are allowed to attract one another. Let, for completeness, the initial state be one of infinitely wide separation of infinitely small filamentary currents in closed circuits. Then, on concentration to any other state, the work done by the attractive forces is represented by  $\sum \mu \vec{H}^2/2$ , where  $\mu$  is the inductivity and  $\vec{H}$  the magnetic force. This has its equivalent in the energy of motion of the circuits, or may be imagined to be so converted, or else wasted by friction, if we like. But, over and above this energy, the same amount,  $\sum \mu \vec{H}^2/2$ , represents the energy of the magnetic field, which can be got out of it in work. It was zero at the beginning. Now, as Lord Kelvin showed, this double work is accounted for by extra work in the batteries or other sources required to maintain the currents constant. (I have omitted reference to the waste of energy due to electrical resistance, to avoid complications). In the gravitational case there is a partial analogy, but the matter is all along assumed to be incapable of variation, and not to require any supply of energy to keep it constant. If we asserted that  $c\vec{e}^2/2$  was stored energy, then its double would be the work done per unit volume by letting bodies attract from infinity, without any apparent source. But it is merely the exhaustion of potential energy of unknown amount and distribution.

Potential energy, when regarded merely as expressive of the work that can be done by forces depending upon configuration, does not admit of much argument. It is little more than a mathematical idea, for there is scarcely any physics in it. It explains nothing. But in the

бы притягивать, отталкивают друг друга. В случае двух больших параллельных материальных плоскостей это проявляется заметным образом, при очень малом значении  $\vec{e}$  между ними, и относительно большим – на их обратных сторонах.

Но представленная выше аналогия, хотя и интересна в своем роде и служит для акцентирования ненужности предположения о мгновенном или прямом действии материальных тел друг на друга, по крайней мере, не проливает свет на конечную природу гравитационной энергии. Фактически она служит большей наглядности загадки. Поэтому следует признать, что расходование потенциальной энергии среды всей Вселенной представляет собой весьма непонятную и загадочную вещь. Когда материальная среда представляет собой совокупность бесконечно далеко отстоящих друг от друга тел, и силы минимальны, то потенциальная энергия будет максимальной, и, когда потенциальная энергия оказывается предельно израсходована, то тогда силы оказываются наиболее работоспособными!

Теперь рассмотрим задачу магнетизма, в которой мы обнаруживаем некое подобие поведения, т.е. когда токам в материальной схеме позволено притягивать друг друга. Допустим, для полноты картины, что начальное состояние представляет собой бесконечно далеко отстоящие друг от друга бесконечно малые нитевидные токи в замкнутых контурах. Тогда, при скоплении любого другого вида, работа, выполненная силами тяготения, будет равна  $\sum \mu \vec{H}^2/2$ , где  $\mu$  – индуктивность и  $\vec{H}$  – магнитная сила. Эта работа эквивалентна энергии движения упомянутых контуров, или же мы можем представить себе такое преобразование, или же, если нам захочется, сюда можно включить ещё и затраты на трение. Однако, помимо и сверх этой энергии, такую же величину  $\sum \mu \vec{H}^2/2$  составляет энергия магнитного поля, которая может быть получена при его работе. В начальный момент она была равна нулю. Причём, как показал лорд Кельвин, эта вторая работа обусловлена дополнительной работой батареей или других источников, необходимых для поддержания постоянного тока. (Чтобы не усложнять, я опустил упоминание о потерях энергии вследствие электрического сопротивления). Для случая гравитации здесь имеет место лишь частичная аналогия, но вся материя в целом предполагается неспособной к изменениям, и поэтому она не требует какого-либо источника энергии, чтобы поддерживать её неизменной. Если мы говорим, что  $c\vec{e}^2/2$  – накопленная энергия, то тогда её двойником будет отнесённая к единичному объёму работа по притяжению тел из бесконечности, без всякого явного источника. Но в таком случае это будет просто расходование потенциальной энергии неизвестной величины и неизвестного происхождения.

Потенциальная энергия, рассматриваемая лишь как выражение работы, которая может быть выполнена силами, зависящими от конфигурации, не допускает многих аргументов. Это чуть более, чем математическая

consideration of physics in general, it is scarcely possible to avoid the idea that potential energy should be capable of localisation equally as well as kinetic. That the potential energy may be itself ultimately kinetic is a separate question. Perhaps the best definition of the former is contained in these words: – Potential energy is energy that is not known to be kinetic. But, however this be, there is a practical distinction between them which it is found useful to carry out. Now, when energy can be distinctly localised, its flux can also be traced (subject to circuitual indeterminateness, however). Also, this flux of energy forms a useful working idea when action at a distance is denied (even though the speed of transmission be infinitely great, or be assumed to be so). Any distinct and practical localisation of energy is therefore a useful step, wholly apart from the debatable question of the identity of energy advocated by Prof. Lodge.

From this point of view, then, we ought to localise gravitational energy as a preliminary to a better understanding of that mysterious agency. It cannot be said that the theory of the potential energy of gravitation exhausts the subject. The flux of gravitational energy in the form above given is, perhaps, somewhat more distinct, since it considers the flux only and the changes in the amount localised, without any statement of the gross amount. Perhaps the above analogy may be useful, and suggest something better.

## PART II

[*The Electrician* 31 (1893): 359]

In my first article on this subject (*The Electrician*, July 14, 1893, p. 281), I partly assumed a knowledge on the part of the reader of my theory of convective currents of electrification ("Electrical Papers," Vol. II., p. 495 and after), and only very briefly mentioned the modified law of the inverse squares which is involved, viz., with a lateral concentration of the lines of force. The remarks of the Editor<sup>2</sup>, and of Prof. Lodge<sup>3</sup> on gravitational aberration, lead me to point out now some of the consequences of the modified law which arises

идея, в которой едва ли содержится хоть немного физики. Она ничего не объясняет. Но при рассмотрении физики в целом, вряд ли можно допустить мысль, что потенциальная энергия должна быть способна к локализации также хорошо, как кинетическая. Что потенциальная энергия сама может быть, в конечном счете, кинетической – это отдельный вопрос. Пожалуй, лучшее определение предыдущего заключено в этих словах: потенциальная энергия – это энергия, которая не известно, будет ли кинетической. Но, однако, есть практические различия между ними, которые представляются полезными для применения. Теперь, когда энергия может быть четко локализована, ее поток также можно отследить (с учетом циркуляционной неопределенности, впрочем). Кроме того, этот поток энергии наводит на полезную рабочую идею в условиях, когда дальное действие отвергнуто (даже если скорость передачи взаимодействия бесконечно велика, или предполагается таковой). Любая четкая и практичная локализация энергии является поэтому полезным шагом, совершенно вне связи с дискуссионным вопросом о тождественности энергии, отстаиваемым профессором Лоджем<sup>1</sup>.

Тогда, с этой точки зрения, в качестве предварительной меры мы должны дать определение гравитационной энергии для лучшего понимания этого загадочного явления. Нельзя сказать, что теория потенциальной энергии тяготения исчерпывает предмет. Поток гравитационной энергии в выше приведенной форме, возможно, несколько более нагляден, поскольку здесь рассматривается только поток, и изменения ограничены по величине, без каких-либо утверждений об общей величине. Возможно, представленная выше аналогия окажется полезной и поможет что-то объяснить лучше.

## ЧАСТЬ II

[*The Electrician* 31 (1893): 359]

В моей первой статье на эту тему («Электрик», 14 июля 1893, с. 281), я, отчасти, предполагал знакомство части читателей с моей теорией конвективных электрических токов («Электрические записки», т. II с. 495 и далее), и только очень коротко упомянул о видоизменённом законе обратных квадратов, который именно и связан с боковым сгущением силовых линий. Замечания редактора<sup>2</sup>, а также профессора Лоджа<sup>3</sup> по поводу гравитационной aberrации, вынуждают меня особо отметить теперь некоторые последствия видоизмененного закона, которые возникают, когда мы предполагаем, что эфир является рабочей

<sup>1</sup> Сэр Оливер Джозеф Лодж (Sir Oliver Joseph Lodge, 1851–1940) – выдающийся английский физик, изобретатель и писатель; один из изобретателей радио; президент Лондонского общества физиков, президент Общества психических исследований, первый ректор Бирмингемского университета (1901–1919). (Прим. переводчика).

<sup>2</sup> *The Electrician*, July 14, p. 277, and July 23, p. 340.

<sup>3</sup> *The Electrician*, July 28, p. 347.



when we assume that the ether is the working agent in gravitational effects, and that it propagates disturbances at speed  $v$  in the manner supposed in my former article. There is, so far as I can see at present, no aberrations effect, but only a slight alteration in the intensity of force in different directions round a moving body considered as an attractor.

Thus, take the case of a big Sun and small Earth, of masses  $S$  and  $E$ , at distance  $r$  apart. Let  $f$  be the unmodified force of  $S$  on  $E$ , thus

$$f = \frac{SE}{4\pi r r^2 c}, \quad (1)$$

using rational units in order to harmonise with the electromagnetic laws when rationally expressed. Also, let  $F$  be the modified force when the Sun is in motion at speed  $u$  through the ether. Then<sup>1</sup>

$$F = f \times \frac{1 - s}{(1 - s \cdot \sin^2 \theta)^{3/2}}, \quad (2)$$

where  $s$  is the small quantity  $u^2/v^2$ , and  $\theta$  is the angle between  $r$  and the line of motion. ("Electrical Papers," vol. II, pp. 495, 499).

Therefore, if the Sun is at rest, there is no disturbance of the Newtonian law, because its "field of force" is stationary. But if it has a motion through space, there is a slight weakening of the force in the line of motion, and a slight strengthening equatorially. The direction is still radial.

To show the size of the effect, let

$$\begin{aligned} u &= 3 \times 10^7 \text{ centim. per sec. [cm/c]}, \\ v &= 3 \times 10^{10} \text{ centim. per sec. [cm/c]}. \end{aligned} \quad (3)$$

This value of  $u$  is not very different from the speed attributed to fast stars, and the value of  $v$  is the speed of light itself.

So we have

$$s = \frac{u^2}{v^2} = \frac{1}{10^6}, \quad (4)$$

*i.e.*, one millionth. All perturbing forces of the first order are, therefore, of the order of magnitude of only one-millionth of the full force, even when the speed of propagation is as small as that of light.

The simplest case is when the common motion of the Sun and Earth is perpendicular to the plane of the orbit. Then  $\theta = \pi/2$ , all round the orbit, and

средой в гравитационных явлениях, и что он передаёт возмущения со скоростью  $v$  способом, который был предположен в моей предшествующей статье. Здесь нет никакого эффекта абберации, а есть только незначительное изменение интенсивности силы в разных направлениях вокруг движущегося тела, рассматриваемого в качестве точки притяжения.

Итак, возьмём случай большого Солнца и маленькой Земли с массами  $S$  и  $E$  соответственно, на расстоянии  $r$  друг от друга. Пусть  $f$  – постоянная сила, с которой  $S$  действует на  $E$ , в таком случае

Здесь мы используем рациональные единицы для согласования с электромагнитными законами в рациональном представлении. Кроме того, положим, что  $F$  – это переменная сила, когда Солнце движется со скоростью  $u$  сквозь эфир. Тогда<sup>1</sup>

где  $s$  – малая величина  $u^2/v^2$ , а  $\theta$  – угол между  $r$  и направлением движения («Электрические записки», т. II, с. 495, 499).

Поэтому если Солнце находится в покое, то нарушения Ньютоновского закона нет, поскольку его [Солнца – *Перев.*] «силовое поле» является стационарным. Но если оно движется сквозь пространство, то здесь возникает небольшое уменьшение силы вдоль линии движения и небольшое её увеличение вдоль экватора. Направление по-прежнему радиальное.

Чтобы показать величину эффекта, положим

Эта величина  $u$  не очень отличается от скорости, характерной для быстрых звёзд, а величина  $v$  – скорость света.

Итак, мы имеем

то есть одну миллионную. Следовательно, все возмущающие силы первого порядка имеют порядок лишь одной миллионной от полной силы, даже если скорость распространения находится в пределах величины скорости света.

Простейшим является случай, когда Солнце и Земля совершают совместное движение перпендикулярно плоскости орбиты. Тогда  $\theta = \pi/2$  для круговой орбиты, и выражение

<sup>1</sup> This is the case of steady motion. There is no simple formula when the motion is unsteady.

<sup>3</sup> Это случай установившегося движения. Не существует простой формулы, когда движение неустановившееся

$$F = f(1 + s/2) \quad (5)$$

showing increase in the force of attraction of  $S$  on  $E$  of one two-millionth part, without alteration of direction or variation in tile orbit<sup>1</sup>.

But when the common motion of the Sun and Earth is in their plane,  $v$  varies from 0 to  $2\pi$  in a revolution, so that the attraction on  $E$ , whilst towards the Sun's centre, always undergoes a periodic variation from

показывает увеличение силы притяжения Земли  $E$  к Солнцу  $S$  на одну двухмиллионную часть, без изменения направления или колебаний в плоскости орбиты<sup>1</sup>.

Но когда совместное движение Солнца и Земли совершается в плоскости орбиты Земли, тогда  $\theta$  меняется от 0 до  $2\pi$  за один оборот, так что сила притяжения Земли  $E$  к центру Солнца  $S$  всегда подвергается периодическим изменениям от величины

$$F = f(1 - s), \quad (6)$$

when  $\theta = 0$ , to

когда  $\theta = 0$ , до величины

$$F = f(1 + s/2), \quad (7)$$

when  $\theta = \pi/2$ . The extreme variation is, therefore,  $3sf/2$ , according to the data used. The result is a slight change in the shape of the orbit.

когда  $\theta = \pi/2$ . Поэтому, в пределе изменение составляет  $3sf/2$ , в зависимости от используемых данных. Результатом является небольшое изменение формы орбиты.

But, to be consistent, having made  $v$  finite by certain suppositions, we should carry out the consequences more fully, and allow not merely for the change in the Newtonian law, as above, but for the force brought in by the finiteness of  $v$  which is analogous to the "electromagnetic force." This is very small truly, but so is the above change in the Newtonian law, and since they are of the same order of magnitude, we should also count the auxiliary force. Call it  $\vec{G}$ . Then

Но, приняв в силу определённых предположений величину  $v$  конечной, мы, чтобы быть последовательными, должны сформулировать выводы более полно и допустить не просто изменения в Ньютоновском законе, как выше, но и ввести силу, обусловленную конечностью величины  $v$ , которая является аналогом «электромагнитной силы». На самом деле, она очень мала, но это следствие сделанных выше изменений в законе Ньютона, а так как они имеют тот же порядок величины, мы должны также вычислить значение дополнительной силы. Назовём её  $\vec{G}$ . Тогда

$$\vec{G} = F \frac{\chi qu}{v^2} \vec{q}_1 \times (\vec{r}_1 \times \vec{u}_1), \quad (8)$$

where  $F$  is as before, in (2) above,  $q$  is the actual speed of the Earth (not the same as  $u$ ), and in the third vectorial factor  $\vec{q}_1$ ,  $\vec{u}_1$  and  $\vec{r}_1$ , are unit vectors drawn parallel to the direction of the Earth's motion, of the Sun's motion, and from the Sun to the Earth. We see at once that the order of magnitude cannot be greater than that of the departure of  $F$  from  $f$  before considered, because  $u$  and  $q$  will be of the same order, at least when  $u$  is big. As for  $\chi$ , it is simply a numerical factor, which cannot exceed 1, and is probably  $2/3$ .

где  $F$ , как и ранее, имеет вид (2),  $q$  – текущая скорость Земли (не тождественная  $u$ ), а в тройном векторном произведении  $\vec{q}_1$ ,  $\vec{u}_1$  и  $\vec{r}_1$  – единичные векторы, параллельные направлению движения Земли, направлению движения Солнца, и направлению от Солнца к Земле соответственно. Мы сразу же видим, что порядок величины не может быть больше, чем разность  $F$  и ранее рассмотренной  $f$ , поскольку  $u$  и  $q$  будут одного порядка, по крайней мере, в том случае, когда  $u$  велико. Что касается  $\chi$ , то это просто числовой множитель (коэффициент), который не может превышать 1, и, вероятно, равняется  $2/3$ .

The simplest case is when the motion of the Sun is perpendicular to the orbit of the Earth. Then

Простейший случай – когда движение Солнца перпендикулярно орбите Земли. Тогда соотношение

$$G = F\chi s \quad (9)$$

gives the tensor<sup>2</sup> or size of the auxiliary force. It is radial, but outwards, so that the result is

дает нам тензор<sup>2</sup> или величину дополнительной силы. Она направлена по радиусу, но наружу, так что в

<sup>1</sup> But Prof. Lodge tells me that our own particular Sun it considered to move only 10.9 miles per second. This is stupendously slow. The size of  $s$  is reduced to about 1/360 part of that in the text, and the same applies to the corrections depending upon it.

<sup>1</sup> Но профессор Лодж говорит мне, что наша собственное Солнце, по его мнению, проходит в секунду только 10,9 миль. Это исключительно медленно. Значение  $s$  уменьшено примерно до 1/360 части величины, указанной в тексте, и то же самое относится к поправкам, зависящим от неё.

<sup>2</sup> Heaviside uses the word "tensor" for the magnitude of the force vector (O.D.J.).

<sup>1</sup> Хевисайд применяет слово «тензор» к величине вектора силы (Прим. О.Д. Ефименко).

merely to reduce the size of the previous correction, viz., the difference of  $F$  from  $f$  in the same motional circumstances.

But when the line of motion of Sun is in the plane of the orbit, the case is much more complicated. The force  $\vec{G}$  is neither constant (for the same distance) nor radial, except in four positions, viz., two in the line of motion of the Sun, when the auxiliary force vanishes, and two when  $\theta = \pm\pi/2$ , when it is greatest. But this force is still in the plane of the orbit, which is an important thing, and is, moreover, periodic, so that the tangential component is as much one way as the other in a period.

All we need expect, then, so far as I can see from the above considerations, are small perturbations due to the variation of the force of gravity in different directions, and to the auxiliary force. Of course, there will be numerous minor perturbations

If variations of the force of the size considered above are too small to lead to observable perturbations of motion, then the striking conclusion is that the speed of gravity may even be the same as that of light. If they are observable, then, if existent, they should turn up, but if non-existent then the speed of gravity should be greater. Furthermore, it is to be observed that there may be other ways of expressing the propagation of gravity.

But I am mindful of the good old adage about the shoemaker and his last, and am, therefore, reluctant to make any more remarks about perturbations. The question of the ether in its gravitational aspect must be faced, however, and solved sooner or later, if it be possible. Perhaps, therefore, my suggestions may not be wholly useless.

результате просто уменьшается величина предыдущей поправки, т.е. разность  $F$  и  $f$  при тех же условиях движения.

Но когда линия движения Солнца лежит в плоскости орбиты, дело обстоит гораздо сложнее. Сила  $\vec{G}$  не является ни постоянной (на таком же расстоянии), ни радиальной, за исключением четырех позиций, а именно, две из них лежат на линии движения Солнца, когда дополнительная сила исчезает, и две при  $\theta = \pm\pi/2$ , когда эта сила оказывается наибольшей. Но эта сила все еще находится в плоскости орбиты, что важно, и, кроме того, она периодическая, так что, тангенциальная составляющая так или иначе достигает своего наибольшего значения хотя бы раз в период.

Насколько я могу заключить из приведенных выше соображений, всё, что нам следует ожидать, так это лишь малых возмущений из-за изменения силы тяжести в разных направлениях, а также из-за действия второстепенных сил. Конечно, там будет множество мелких возмущений.

Если рассмотренные выше колебания силы слишком малы, чтобы привести к заметным возмущениям движения, то в этом случае мы приходим к поразительному заключению, что скорость распространения гравитации может даже быть такой же, как скорость света. Если они наблюдаемы, следовательно, если они существуют, то они должны проявиться, но если они не существуют, то скорость гравитации должна быть больше. Кроме того, следует заметить, что возможны также иные способы описания распространения гравитации.

Но поскольку я помню старую добрую поговорку про сапожника и его колодку<sup>1</sup>, то, поэтому, не хочу больше делать какие-либо замечания по поводу возмущений. Вопрос эфира в его гравитационном аспекте должен быть, однако, рассмотрен, и решён рано или поздно, если возможно. Пожалуй, поэтому мои соображения могут оказаться не совсем бесполезными.

Цитирование по ГОСТ Р 7.0.11—2011:

Heaviside, O. A Gravitational and Electromagnetic Analogy [= Хевисайд, О. Гравитационная и электромагнитная аналогия (параллельный текст на русском и английском языках)] / О. Хевисайд, С.Г. Геворкян (перевод) // Пространство и Время. — 2017. — № 2-3-4(28-29-30). — С. 86—96. Стационарный сетевой адрес: 2226-7271prov\_st2\_3\_4-28\_29\_30.2017.24.

<sup>1</sup> Речь идет об английской поговорке «Пусть сапожник держится за свою колодку» (Let the shoemaker stick to his last), эквиваленте русских «Всяк сверчок знай свой шесток», «Не в свои сани не садись», «Беда, коль пироги начинёт печи сапожник» (каждый должен заниматься своим делом). (Прим. ред.).